

Cálculo e Instrumentos Financeiros

Empréstimos por obrigações

Alfredo D. Egidio dos Reis



6. Empréstimos por obrigações

6.1 Introdução e conceitos

6.2 Reembolso

6.3 Vida mínima, máxima e média das obrigações

6.4 Rendibilidade e custo. Taxas efectivas

Reembolso. (Algumas) Modalidades. A1

- **Modalidade A** - Reembolso de um número constante de obrigações por período;
- **Modalidade B** - Reembolso por diminuição do valor nominal;
- Modalidade C - Reembolso de uma só vez no final do prazo;
- Modalidade D - Reembolso em prestações constantes (anuidades) de capital e juro.
- Apresentamos (apenas) as Modalidade **A** ($\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$) e **B**:

Modalidade \mathbf{A}_1 : Reembolso de número constante de obrigações - “Ao par”

- As obrigações são distribuídas por séries iguais, os títulos da mesma série reembolsados na mesma data de vencimento.
- Se emitidas diferentes séries, cada série poderá ter uma data específica de vencimento. Poderão existir sorteios das obrigações a reembolsar.

Modalidade A1. Quadro de Amortização

Exemplo (Ex. 6.1, cont.)

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (j_k)	Nº de Obrigações Reembolsadas (N_k)	Amortização (m_k)	Prestação Total (T_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)
1	2 500 000,00	250 000,00	100 000	500 000,00	750 000,00	500 000,00
2	2 000 000,00	200 000,00	100 000	500 000,00	700 000,00	1 000 000,00
3	1 500 000,00	150 000,00	100 000	500 000,00	650 000,00	1 500 000,00
4	1 000 000,00	100 000,00	100 000	500 000,00	600 000,00	2 000 000,00
5	500 000,00	50 000,00	100 000	500 000,00	550 000,00	2 500 000,00

$$\begin{array}{lll}
 N_k = \frac{N_0}{n} & m_k = N_k \cdot Vn & C_0 = N_0 \cdot Vn \\
 C_{k-1} = C_0 - (k-1) \cdot m & j_k = C_{k-1} \cdot i & M_k = k \cdot m
 \end{array}$$

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (i_k)	Nº de Obrigações Reembolsadas (N_k)	Amortização (m_k)	Prestação Total (T_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)
1	C_0	$i_1 = C_0 \cdot i$	N_0/n	m	$i_1 + m$	m
2	$C_1 = C_0 - m$	$i_2 = C_1 \cdot i$	N_0/n	m	$i_2 + m$	$2m$
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$i_3 = C_2 \cdot i$	N_0/n	m	$i_3 + m$	$3m$
...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1)m$	$i_n = C_{n-1} \cdot i$	N_0/n	m	$i_n + m$	$n \cdot m$

$$N_k = \frac{N_0}{n} \quad m_k = N_k \cdot Vn \quad C_0 = N_0 \cdot Vn$$

$$C_{k-1} = C_0 - (k-1) \cdot m \quad j_k = C_{k-1} \cdot i \quad M_k = k \cdot m$$

6.2 Modalidade A2. Quadro de Amortização

Exemplo (Ex. 6.2 (cont.))

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (j_k)	Nº de Obrigações Reembolsadas (N_k)	Amortização (m_k)	Prémio de Reembolso (P_k)	Prestação Total (T_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)
1	2 500 000,00	250 000,00	100 000,00	500 000,00	75 000,00	825 000,00	500 000,00
2	2 000 000,00	200 000,00	100 000,00	500 000,00	100 000,00	800 000,00	1 000 000,00
3	1 500 000,00	150 000,00	100 000,00	500 000,00	125 000,00	775 000,00	1 500 000,00
4	1 000 000,00	100 000,00	100 000,00	500 000,00	150 000,00	750 000,00	2 000 000,00
5	500 000,00	50 000,00	100 000,00	500 000,00	175 000,00	725 000,00	2 500 000,00

$$P_k = N_k \cdot p_k \quad T_k = j_k + m + P_k$$

Modalidade A2. Quadro de Amortização

Período	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Nº de Obrigações Reembolsadas	Montante Reembolsado	Prémio de Reembolso	Prestação Total	Capital Amortizado
(k)	(C_{k-1})	(j_k)	(N_k)	(m_k)	(P_k)	(T_k)	(M_k)
1	C_0	$j_1 = C_0 \cdot i$	N_0/n	m	$N_k \cdot p_1$	$j_1 + m + P_1$	m
2	$C_1 = C_0 - m$	$j_2 = C_1 \cdot i$	N_0/n	m	$N_k \cdot p_2$	$j_2 + m + P_2$	$2m$
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$j_3 = C_2 \cdot i$	N_0/n	m	$N_k \cdot p_3$	$j_3 + m + P_3$	$3m$
...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1) \cdot m$	$j_n = C_{(n-1)} \cdot i$	N_0/n	m	$N_k \cdot p_n$	$j_n + m + P_n$	$n \cdot m$

$$P_k = N_k \cdot p_k$$

$$T_k = j_k + m + P_k$$

Modalidade B: Reembolso por redução do valor

Reembolso de parte do valor nominal de todas as obrigações:

$$m = N_0 \times VN/n \quad n : n^{\circ} \text{ reembolsos}$$

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (j_k)	Amortização (m_k)	Prestação Total (T_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)
1	C_0	$j_1 = C_0 \cdot i$	m	$j_1 + m$	m
2	$C_1 = C_0 - m$	$j_2 = C_1 \cdot i$	m	$j_2 + m$	2m
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$j_3 = C_2 \cdot i$	m	$j_3 + m$	3m
...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1) \cdot m$	$j_n = C_{(n-1)} \cdot i$	m	$j_n + m$	n.m

Exemplo (Ex. 6.3, Omega S.A.)

Ficha técnica: N°: 100, 000; VE: 10,00€; VN: 10,00€;

Reembolsos anuais: Por redução ao VN; N° de reembolsos: 2;

Data do primeiro reembolso: 2 anos após a emissão; Tx. juro anual nominal (2 capitalizações): 8%; Pagamento de juros: Semestral;

Data do 1º pagamento de juros: 6 meses após a emissão.

Quadro de amortização

Período (semestres)	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Amortização	Prestação Total	Amortizações Acumuladas
(k)	(C_{k-1})	(j_k)	(m_k)	(T_k)	(M_k)
1	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
2	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
3	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
4	1 000 000,00	40 000,00	500 000,00	540 000,00	500 000,00
5	500 000,00	20 000,00	-	20 000,00	500 000,00
6	500 000,00	20 000,00	500 000,00	520 000,00	1 000 000,00

Vida máxima, mínima e média do empréstimo

- 1 **Vida Mínima**, V_m : Tempo entre a data actual e a primeira data reembolsável da obrigação. À data de emissão V_m é igual à data de vencimento do 1º reembolso.
- 2 **Vida Máxima**, V_M : Tempo entre a data actual e a última data possível de reembolso. À data de emissão a V_M é igual ao prazo empréstimo.
- 3 **Esperança de Vida**, E_v : Tempo médio de reembolso das obrigações. Obtém-se através da média do número de obrigações amortizadas em cada data de reembolso (lote) ponderados pelos respectivos prazos.

Esperança de Vida, E_v

Tempo médio de reembolso das obrigações.

$$E_v = \frac{1}{\sum_{k=1}^n N_k} \sum_{k=1}^n P_k N_k.$$

P_k : Prazo de reembolso do lote k de obrigações ainda *vivas*;

N_k : Número de obrigações do lote k que ainda falta vencer;

n : Número de lotes que ainda falta vencer.

Exemplo (Ex. 6.4)

Em 01/07/n Beta S.A. emitiu empréstimo obrigacionista. Ficha Técnica:

- *Número de obrigações emitidas (N_o): 300 000;*
- *Valor de emissão: €10,00;*
- *Valor nominal de cada obrigação (V_n): €10,00;*
- *Maturidade (prazo) do empréstimo: 4 anos;*
- *Reembolsos anuais constantes: Pelo valor nominal;*
- *Número de reembolsos (n): 4;*
- *Data do primeiro reembolso: 1 ano após emissão;*
- *Taxa de juro anual: 5%;*
- *Pagamento de juros: Anual;*
- *Data do primeiro pagamento de juros: 1 ano após emissão.*

$V_m = 1$ ano; $V_M = 4$ anos; EV , na data da emissão:

$$E_v = \frac{1 \times 75000 + 2 \times 75000 + 3 \times 75000 + 4 \times 75000}{75000 + 75000 + 75000 + 75000} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ anos.}$$

Rendibilidades, Taxa de Rendimento. De forma simples:

Taxa de rendimento de um investimento

Em equação de valor, é uma taxa de juro que permite igualar os custos aos benefícios por ele gerados, tudo actualizado ou acumulado a um momento de referência.

Exemplo (Taxa de rendimento de uma Obrigação)

O custo é o valor de compra, os benefícios são os juros periodicos (cupão periódico), o reembolso, mais eventuais prémios.

Nota: O que é rendimento para o investidor é custo para emissor, e neste caso falamos em taxa de custo.

Taxas efectivas das obrigações. Rendimentos para o investidor

- **Juros** recebidos;
- **Prémio de Reembolso**, eventualmente se acima do par;
- **Desconto de Emissão**, eventualmente, se abaixo do par.

Taxa Anual Efectiva, r (Reembolso único) :

$$PE = (VN - DE) = \sum_{m=1}^k \frac{j_m}{(1+r)^m} + \frac{(V_n + PR)}{(1+r)^k}$$

$$PE = VN \cdot i \cdot a_{\overline{k}|r} + \frac{(V_n + PR)}{(1+r)^k}, \text{ se juros anuais constantes.}$$

VN : Valor nominal; PE : Preço Emissão; DE : Desconto Emissão;
 j_m : Juro anual à taxa i ; k : período de reembolso; PR : Prémio Reembolso (se existir)

Exemplo (Ex. 6.7)

Considere que no dia 02/01/n a Delta, S.A. emitiu empréstimo obrigacionista de 200 000 obrigações. Características:

- Valor nominal de cada obrigação (V_n): 10,00 €
- Preço de emissão (PE): 9,20 €
- Reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal
- Número de reembolsos: 4
- Data do primeiro reembolso: 02/01/n + 2
- Valor de reembolso: ao par
- Taxa de juro anual: 8%
- Pagamento de juros: anualmente
- Data do primeiro pagamento de juros: 02/01/n + 1

Um investidor adquiriu uma obrigação na emissão com reembolso no último lote (02/01/n + 5). Qual a taxa de rendimento?

Exemplo (Ex. 6.7 (cont.))

Qual a taxa anual de rendimento para o investidor?

Ano	0	1	2	3	4	5
PE	(9.20)					
juro		0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
VR						10 + 0

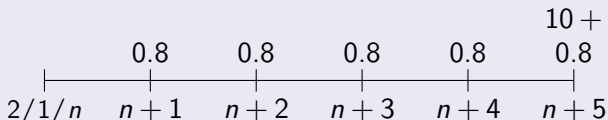
$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = j_5 = 10,00 \times 0,08 = 0,80\text{€}$$

$$PE = VN \cdot i \cdot a_{\overline{k}|r} + \frac{(VN + PR)}{(1+r)^k}$$

$$9,20 = 0,8 \cdot a_{\overline{5}|r} + \frac{10+0}{(1+r)^5} \Leftrightarrow r \simeq 10,117\% \quad (\text{Excel})$$

Exemplo (Ex. 6.7 (cont.)). Rendimento alternativo

Qual o valor acumulado, S , do investimento ao fim do prazo?



$$r \simeq 10,117\%$$

$$S = 0,8 \cdot s_{\overline{5}|r} + 10 \simeq 14.89$$

Rendimento alternativo: Se pusesse €9.2 num depósito c/ juros à taxa de $r = 10,117\%$, V.A.:

$$S = 9.2(1 + r)^5 \simeq \text{€}14.89$$

Determinação do Valor de Compra:

Exemplo (Ex. 6.8 (6.7 cont.))

Um investidor pretende adquirir, em $02/07/n + 1$, 200 destas obrigações e aponta a uma taxa de rendimento anual efectiva de 9%. Se as obrigações tiverem um plano de reembolso de 25 no segundo lote, 75 no penúltimo lote e 100 no último lote, quanto deverá o investidor pagar pelas obrigações?



Exemplo (Ex. 6.8 (cont.))

Valor de compra da obrigação, Quadro de Amortização:

<i>Data</i>	<i>Obg</i>	<i>Juro</i>	<i>Obrg</i>	<i>Reembolso</i>	<i>Total</i>
2/1/ $n + 2$	200	$200(10)0,08$ $= 160,00$			160,00
$n + 3$	200	160,00	25	$25(10)$ $= 250,00$	410,00
$n + 4$	175	140,00	75	750,00	890,00
$n + 5$	100	80,00	100	1000,00	1 080,00

$$C = \frac{160,00}{1,09^{0,5}} + \frac{410,00}{1,09^{1,5}} + \frac{890,00}{1,09^{2,5}} + \frac{1080,00}{1,09^{3,5}} = 2043,62\text{€}$$

$$c = \frac{C}{200} = 10,22\text{€}$$

Taxa Efectiva para o Emitente

- A entidade emitente paga uma taxa de juro que em geral não é uma taxa real, efectiva.
- Suporta custos adicionais para além da taxa de juro nominal:
 - impostos, comissões, descontos de emissão, prémios de reembolso...
- Se incluirmos os custos envolvidos podemos calcular uma taxa de remuneração efectiva.

Associados à Emissão	Ao Longo do Empréstimo
<ul style="list-style-type: none"> • Impressão; • Publicidade; • Autorizações; • Impostos; • Comissões a Inst. Financeiras pela colocação; • Descontos de emissão; • Etc.. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comissões a Inst. Financeiras pelos serviços de pagamento dos juros e dos reembolsos; • Juros a pagar aos investidores ao longo do empréstimo; • Custos associados aos prémios de reembolso.

Taxa Efectiva para o Emitente, r :

$$N_0 \times PE = \sum_{p=1}^k \frac{OC_p}{(1+r)^p} + \sum_{p=1}^k \frac{j_p}{(1+r)^p} + m \cdot a_{\overline{n}|r}$$

$N_0 \times PE$: Valor total subscrição

OC_p : Outros Custos no ano p

j_p : juros à taxa nominal, ano p

m : amortização do período, se constante

k : prazo do empréstimo

n : prazo da amortização

Exemplo (Ex. 6.9, Sociedade Alfa, S.A.)

No dia 02/01/ n , emitiu empréstimo obrigacionista. Ficha técnica:

- *Número de obrigações emitidas (N_o): 250 000;*
- *Valor nominal de cada obrigação (V_n): €10,00;*
- *4 reembolsos anuais constantes: Pelo valor nominal;*
- *Data do primeiro reembolso: 02/01/ $n + 2$;*
- *Valor de reembolso: €10,00;*
- *Tx. juro anual nominal: 7%; juros, pagos anualmente;*
- *Data do primeiro pagamento de juros: 02/01/ $n + 1$.*

Calcular a taxa efectiva anual, nos seguintes casos:

- 1 *Obrigações emitidas ao par, valor de subscrição: €10,00;*
- 2 *Obrig. emitidas abaixo do par, v. subscrição: €9,00.*

1 Obrigações emitidas ao par, valor de subscrição: €10,00



Periodos (anos)	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Amortização	Prestação Total	Amortizações Acumuladas
(k)	$(C_{k,t})$	(j_k)	(m_k)	(T_k)	(M_k)
1	2 500 000,00	175 000,00	-	175 000,00	-
2	2 500 000,00	175 000,00	625 000,00	800 000,00	625 000,00
3	1 875 000,00	131 250,00	625 000,00	756 250,00	1 250 000,00
4	1 250 000,00	87 500,00	625 000,00	712 500,00	1 875 000,00
5	625 000,00	43 750,00	625 000,00	668 750,00	2 500 000,00

$$2.500.000 = \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa \rightarrow 7,0% (Excel)

2 Obr. emitidas abaixo do par: €9,00

$$250000 \times 9 = \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa → 10,623% (Excel)

3 Emissão ao par, com custos adicionais

Custos Emissão: publicidade+autorizações+comissões

$$CE = 120000 + 30000 + 2500000 \times 0,01 = 175000$$

$$2.500.000 = 175000 + \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa → 9,477% (Excel)

6. Empréstimos por obrigações

6.1 Introdução e conceitos

6.2 Reembolso

6.3 Vida máxima e vida média do empréstimo

6.4 Taxas efectivas das obrigações