Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

Lista nº 6 para discutir com tutor

(1) Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} x \displaystyle\int_0^{(x^2+x)} \frac{1}{1+t^2} dt & \text{se } x \geq 0 \\ \\ \dfrac{e^{kx^2} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Justifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Calcule k de forma a que f seja diferenciável em $x = 0$ e escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Época Normal - Semestre 1 - Janeiro de 2009

(2) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{(x^2+x+1)} e^{-t} dt - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{a \ln(1+x^2)}{x} + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Indique, justificando, para que valores de a e b se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Calcule os valores de a e b de forma a que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^- \; x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Época Normal - Semestre 1 - Janeiro de 2008

(3) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ verifique que se tem

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt \right)^x = e^{f(0)}.$$

Época Normal - Semestre 1 - Janeiro de 2009

Soluções numéricas:

1.b) $k = 0$; Recta: $y = 0$;

1.c) proposição verdadeira;

2.a) $a \in \mathbb{R}$ e $b = -1/e$;

2.b) $b = -1/e$ e $a = 1/e$;
2.c) proposição falsa;
3. sugestão: escreva o lmimite pedido de forma a poder aplicar a regra de Cauchy;