5.2. Integrais definidos; cálculo de áreas.

5.2.1 Integral definido: definições e propriedades

- Def: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f contínua em $[a, b]$.

  Integral definido de f no intervalo $[a, b]$ é o número

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad \text{(fórmula de Barrow)}$$

sendo $F(x)$ qualquer primitiva de f em $]a, b[$;

$[a, b]$ - intervalo de integração

a - limite inferior de integração, b - limite superior de integração .

- Notação: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

- Ex: Calcule:

  a) $\int_1^3 2x\, dx$

  b) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

  c) $\int_1^{-2} x + 3\, dx$

- Obs: Se f contínua em $[a, b]$, então $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$

- Prop: Propriedades do integral definido (completar)

  1) $\int_a^b f(x)dx \qquad \int_b^a f(x)dx$

  2) $\int_a^a f(x)dx =$

  3) $\int_a^b k\, f(x)dx \qquad k \int_a^b f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$

Propriedades do integral definido (cont.):

4) $\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) $\int_a^b 0\, dx = \quad .$

- Ex: Calcule

1) $\int_1^0 \frac{1}{x+1} dx$, sabendo que $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$

2) $\int_0^2 \frac{1}{x+1} dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$

3) $\int_1^4 \frac{e^x \sin x}{x+1} dx + \int_4^1 \frac{e^x \sin x}{x+1} dx$

4) $\int_2^2 x^2 \operatorname{arctg} x - x \ln \sqrt{e^x}\, dx$

TPC: 13 a b d g

5.2.2 Cálculo de áreas

- Prop:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f contínua em $[a,b]$ e tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$.

Então, $\int_a^b f(x)\, dx$ representa a área do conjunto A, limitado, e definido por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \quad x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(isto é, a área da região limitada pelo eixo das abcissas, pelo gráfico de f e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$).

- Ex:

1. Calcule a área de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x^2\}$
2. Calcule a área de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 8 - x\}$
3. Calcule a área da região do 1º quadrante limitada pelo gráfico de $f(x) = 4 - x^2$.

- Obs: Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ então a área de
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$
é dada por $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$.

- Ex: 4. Calcule a área de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 2 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq 8 - x\}$.

- Ex: 5. Calcule a área das seguintes regiões

  a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq |x|\}$

  b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq 5 \ \wedge \ y \geq -5x + 5 \ \wedge \ y \geq \ln x\}$ (14b)

c) R_3: região limitada pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = -2$ e $x = -1$

d) R_4: região limitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 3 - 2x$ e $y = x^2$.

- TPC: 14 a c d, 15 b d.
  resto do 14 e 15 (só depois de não terem dúvidas nos anteriores)

5.3 Integral Indefinido. Teorema Fundamental do Cálculo Integral

- Def: Seja f contínua em $[a, b]$ e $x \in [a, b]$.
  À função $\int_a^x f(t)\, dt$ chama-se **integral indefinido**.

- Ex: $\int_0^x e^{2t}\, dt$

- Teorema fundamental do Cálculo Integral

  Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f contínua em $[a,b]$ e seja $x \in]a,b[$.

  Então,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

- Obs: Note que o teorema anterior garante que se f for contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

  não só é contínua, mas também diferenciável no intervalo $[a,b]$.

- Ex: a) Calcule $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{2t}\,dt\right)$.

  b) Estude a monotonia de $g(x) = \int_0^x t(t-1)e^{-2t}\,dt$ em $\mathbb{R}$.

- TPC: 17a

5.4 Integrais impróprios

- Até agora, estudámos $\int_a^b f(x)\ dx$, sendo

  a) $I = [a,b]$ um intervalo limitado

  b) $f(x)$ uma função limitada em $[a,b]$ (porque f contínua em I limitado)

- Def: Se I não for limitado ou se f não for limitada em $I= [a,b]$, então ao integral $\int_a^b f(x)\,dx$ chama-se **integral impróprio**.

- Ex: a) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

  b) $\int_1^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

  c) $\int_1^3 \frac{1}{x-2}\,dx$

- Como se calculam os integrais impróprios?

- Prop: 1) Se f contínua em $[a,+\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{z\to+\infty} \int_a^{z} f(x)\ dx$

  2) Se f contínua em $]-\infty, b]$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{z\to-\infty} \int_z^{b} f(x)\ dx$

  3) Se f contínua em $[a,b[$ e não for limitada numa vizinhança de b,

  $$\int_a^{b} f(x)\ dx = \lim_{z\to b} \int_a^{z} f(x)\ dx.$$

  4) Analogamente, se f contínua em $]a,b]$ e não for limitada numa vizinhança de a,

  $$\int_a^{b} f(x)\ dx = \lim_{z\to a} \int_z^{b} f(x)\ dx.$$

Em qualquer dos casos,

- se o limite indicado não existir (ou for ∞), o integral do 1º membro diz-se divergente;
- se o limite indicado existir e for finito, o integral do 1º membro diz-se convergente.

- Ex: Estude a convergência dos seguintes integrais:

  a) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ dx$

  b) $\int_1^{3} \frac{1}{1-x}\ dx$

  c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$

  d) $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$

- TPC: 19, 18abdf e acabar os exercícios do capítulo 5