Gestão do Desporto

Matemática I

2019/2020

Capítulo 5

5. Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

5.1. Primitivas

- ***5.1.1. Definições e Propriedades Principais***
- ***5.1.2. Métodos Gerais de Primitivação***
  - ***a) Primitivação Imediata***
  - ***b) Primitivação por Partes***
  - ***c) Primitivação por Decomposição***
  - ***d) Primitivação por Substituição***

5.2. Integrais

- ***5.2.1. Integrais Definidos***
- ***5.2.2. Integrais Indefinidos***
- ***5.2.3. Integrais Impróprios***

5.1. Primitivas

5.1.1. Definições e Propriedades Principais

DEFINIÇÃO – Primitiva de uma Função

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo.

Primitiva de f em I é qualquer função $F: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I$$

- **Ex. 1:** Encontre uma primitiva da função f dada por $f(x) = 2x$, em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO – Função Primitivável

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo.

f é **primitivável** em I se existir pelo menos uma primitiva de f em I.

- **Ex.2:** A função do exemplo anterior dada por $f(x) = 2x$ é primitivável em $\mathbb{R}$? Porquê?

- **Obs:** Uma função primitivável tem inúmeras primitivas! Qualquer constante C adicionada a uma antiderivada de uma função primitivável é também uma primitiva dessa mesma função.

- **Ex. 3:** Ainda para a função $f(x) = 2x$, defina outra primitiva diferente da que indicou no Ex. 1.

DEFINIÇÃO – Conjunto de Primitivas de uma Função

Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo.

O **conjunto de todas as primitivas** de f em I representa-se por:

$$F(x) \qquad \text{ou} \qquad P\,f(x) \qquad \text{ou ainda} \qquad \int f(x)\,dx$$

- $\int$ é o símbolo de **integral**;
- $f(x)$ é a **função integranda** ou **integrando**;
- dx é o símbolo que indica a **variável de integração**.

- **Ex. 4:** Seja $f(x) = 2x$. Indique o conjunto de todas as primitivas de f utilizando os três tipos de notação.

- **Ex. 5:** Obtenha:

  a) $\int 2y\ dx$ b) $\int 2y\ dy$

TEOREMA – Propriedades Algébricas das Primitivas
Sejam f e g funções primitiváveis. Então:
P1) $P\ kf = k\ P\ f$, onde $k \in \mathbb{R}$
P2) $P\ f + g = P\ f + P\ g$

- **Ex. 6:** Calcule $P\ 5e^x + 3$

5.1.2. Métodos Gerais de Primitivação

a) Primitivação Imediata

É um método para primitivar funções simples e que consiste na inversão das regras de derivação.

Regras de Primitivação	
$P\ u' \cdot u^a = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$P\ u' \cdot \sin u = -\cos u + C$
$P\ u' \cdot e^u = e^u + C$	$P\ \dfrac{u'}{\cos^2 u} = P\ u' \cdot \sec^2 u = \operatorname{tg} u + C$
$P\ u' \cdot a^u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+$	$P\ \dfrac{u'}{\sin^2 u} = P\ u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u = -\operatorname{cotg} u + C$
$P \dfrac{u'}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$P\ \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$
$P\ u' \cdot \cos u = \sin u + C$	$P \dfrac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$

- **Ex. 7:** Calcule as primitivas de:

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = x^2$

e) $f(x) = 1/x^7$

f) $f(x) = (5x + 1)^2$

g) $f(x) = e^x$

h) $f(x) = e^{2x}$

i) $f(x) = 6xe^{3x^2}$

j) $f(x) = 1/x$

k) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

m) $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b) Primitivação por Partes

Este método auxilia no cálculo de primitivas que envolvem multiplicação de funções.

Note-se que: $P\,fg \neq P\,f \times P\,g$ (por exemplo: $P\,x \cdot x \neq P\,x \cdot P\,x$)

Primitivação por Partes
$P\,f'g = fg - P\,fg'$

- **Ex. 8:** Primitive por partes:

a) $P\,xe^x$

b) $P\,x\cos x$

c) $P\,x^2e^x$

d) $P\ln x$

e) $P\,e^x \sin x$

c) Primitivação por Decomposição

Este método consiste em, antes de primitivar, escrever a função a primitivar como soma de funções mais simples de primitivar.

- **Ex. 9:** Calcule $P\ (x^3+1)^2$

➢ Caso Particular Importante: Primitivação de funções racionais

$$P\ \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ onde } P(x) \text{ e } Q(x) \text{ são polinómios em } x$$

- **Obs:** Contudo, algumas funções racionais têm primitiva imediata.

- **Ex. 10:** Calcule:

a) $P\ \frac{3}{1+x^2}$

b) $P\ \frac{5x}{1+x^2}$

c) $P\ \frac{1}{1+9x^2}$

d) $P\ \frac{x}{1+9x^2}$

e) $P\ \frac{1}{1+(x-2)^2}$

f) $P\ \frac{x-2}{1+(x-2)^2}$

g) $P\ \frac{1}{25+(x-2)^2}$

Primitivação de funções racionais quando a primitiva não é imediata…

Seja $P(x)/Q(x)$ uma função racional, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em x.

Passo 1:

a) Se grau $P(x) \geq$ grau $Q(x)$, efectuar a divisão dos polinómios, obtendo a soma de um polinómio com uma função racional própria $p(x)/q(x)$, com grau $p(x) <$ grau $q(x)$. Se esta última função racional não tiver primitiva imediata, passar ao "Passo 2".

b) Se grau $P(x) <$ grau $Q(x)$, mas $P(x)/Q(x)$ não tiver primitiva imediata passar ao "Passo 2".

- **Ex. 11:** Calcule:

a) $P\ \frac{x^3+4}{x+2}$ b) $P\ \frac{x^3+4}{x^2+1}$

Passo 2:

Quando $p(x)/q(x)$ não tem primitiva imediata, decompô-la em elementos simples de acordo com um dos seguintes teoremas.

TEOREMA 1 – Decomposição de Funções Racionais (raízes reais)

Se o denominador $q(x)$ tiver k raízes reais $r_1, r_2, \ldots, r_k$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_k$, isto é, se $q(x)$ puder ser escrito como: $(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}\cdots(x-r_k)^{m_k}$, então $p(x)/q(x)$ pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = {} & \frac{a_{11}}{x-r_1} + \frac{a_{12}}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} + \\ & + \frac{a_{21}}{x-r_2} + \frac{a_{22}}{(x-r_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2m_2}}{(x-r_2)^{m_2}} + \\ & + \cdots + \frac{a_{k1}}{x-r_k} + \frac{a_{k2}}{(x-r_k)^2} + \cdots + \frac{a_{km_k}}{(x-r_k)^{m_k}} ,\end{aligned}$$

onde $a_{11}, \ldots, a_{km_k}$ são constantes.

- **Ex. 12:** Calcule:

a) $P\ \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ b) $P\ \frac{3}{-2x^2-2x+4}$ c) $P\ \frac{-3x+2}{x^2(x-1)}$

TEOREMA 2 – Decomposição de Funções Racionais (raízes reais e complexas)

Se o denominador $q(x)$ tiver k raízes reais $r_1, ..., r_k$ com multiplicidades $m_1, ..., m_k$, e l pares de raízes complexas $s_1 = p_1 \pm iq_1, ..., s_l = p_l \pm iq_l$ com multiplicidades $n_1, ..., n_l$, então $p(x)/q(x)$ pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_{11}}{x-r_1} + \frac{a_{12}}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} +$$

$$+ \cdots + \frac{a_{k1}}{x-r_k} + \frac{a_{k2}}{(x-r_k)^2} + \cdots + \frac{a_{km_k}}{(x-r_k)^{m_k}} +$$

$$+ \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x-p_1)^2 + q_1^2} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^2} + \cdots + \frac{b_{1n_1}x + c_{1n_1}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^{n_1}} +$$

$$+ \cdots + \frac{b_{l1}x + c_{l1}}{(x-p_l)^2 + q_l^2} + \frac{b_{l2}x + c_{l2}}{[(x-p_l)^2 + q_l^2]^2} + \cdots + \frac{b_{ln_l}x + c_{ln_l}}{[(x-p_l)^2 + q_l^2]^{n_l}}$$

onde $a_{11}, ..., a_{km_k}, b_{11}, ..., b_{ln_l}, c_{11}, ..., c_{ln_l}$ são constantes.

- **Ex. 13:** Calcule $P\ \frac{x^4+6x+9}{(x^2+3)^2(x-1)}$.

d) Primitivação por Substituição

Este método altera a expressão da função a primitivar por outra equivalente mais fácil de primitivar.

Primitivação por Substituição

Se na primitiva em ordem à variável x se substituir x por $g(t)$, então:

$$\int f(x)\ dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\ dt$$

- **Obs:** Depois de calculada a primitiva em ordem à nova variável t, é necessário efectuar a retrosubstituição para a resposta ser dada em termos da variável original x.

- **Ex. 14:** Primitive por substituição:

a) $P\ \frac{(e^x)^2}{1+e^x}$ b) $P\ \frac{e^{3x}}{4+e^{2x}}$ c) $P\ \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ d) $P\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ e) $P\ \sqrt{1-x^2}$

(Sugestão para e): faça a substituição $x = \sin t$ e use a identidade $\cos^2 t = \frac{1}{2}\cos(2t)$).

5.2. Integrais

5.2.1. Integrais Definidos

DEFINIÇÃO – Integral Definido

Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$.

Integral Definido de f no intervalo $[a, b]$ é o número

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

onde:

- F é qualquer **primitiva** de f em $[a, b]$;
- $[a, b]$ é o **intervalo de integração**;
- a é o **limite inferior de integração**;
- b é o **limite superior de integração**.

- **Obs:** A notação empregue no cálculo do integral definido é a seguinte:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Ex. 15:** Calcule:

a) $\int_1^3 2x\, dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

c) $\int_1^{-2} x + 3\, dx$

TEOREMA – Propriedades do Integral Definido
P1) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
P2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
P3) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,\ k \in \mathbb{R}$
P4) Seja $a \le c \le b$. Então: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
P5) $\int_a^b 0\,dx = 0$

- **Ex. 16:** Calcule:

  a) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$. Qual o valor de $\int_1^0 \frac{1}{x+1}\,dx$? E de $\int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx$?

  b) $\int_1^4 \frac{e^x \sin x}{x+1}\,dx + \int_4^1 \frac{e^x \sin x}{x+1}\,dx$

  c) $\int_\pi^\pi x^2 \operatorname{arctg} x - x \ln\sqrt{e^x}\,dx$

Cálculo de Áreas

PROPRIEDADE – Área abaixo do gráfico de uma função
Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e tal que $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$. Então, $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a **área** do conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \le x \le b\ \wedge\ 0 \le y \le f(x)\}$ Isto é, representa a área da região no plano entre as rectas verticais $x = a$ e $x = b$, e entre o eixo das abcissas e o gráfico de f.

- **Ex. 17:** Calcule a área dos seguintes conjuntos:

  a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 1 \le x \le 2\ \wedge\ 0 \le y \le x^2\}$

  b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le x \le 4\ \wedge\ 0 \le y \le 8 - x\}$

  c) Região do 1º quadrante limitada pelo gráfico de $f(x) = 4 - x^2$.

PROPRIEDADE – Área entre gráficos de funções

Sejam f e g funções contínuas em $[a,b]$ e tais que $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$.

Então, $\int_a^b f(x) - g(x)\, dx$ representa a **área** do conjunto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leq x \leq b\ \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Isto é, representa a área da região no plano entre as rectas verticais $x = a$ e $x = b$, e entre os gráficos de f e g.

- **Ex. 18:** Calcule a área das seguintes regiões:

  a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 1 \leq x \leq 2\ \wedge\ x^2 \leq y \leq 8 - x\}$
  b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 \leq y \leq |x|\}$
  c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \leq 5\ \wedge\ y \geq -5x + 5\ \wedge\ y \geq \ln x\}$
  d) R_4: Região limitada pelo gráfico de $f(x) = 1/x$, pelo eixo das abcissas, e pelas rectas $x = -2$ e $x = -1$.
  e) R_5: Região limitada por $x = 0$, $x = 2$, $y = 3 - 2x$ e $y = x^2$.

5.2.2. Integrais Indefinidos

DEFINIÇÃO – Integral Indefinido

Seja f contínua em $[a,b]$ e $x \in [a,b]$.

A função definida por:

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

designa-se por **integral indefinido**.

Um exemplo de integral indefinido é a função $\int_0^x e^{2t}\, dt$.

- **Ex. 19:** Escreva o integral indefinido anterior como uma expressão em termos de x, sem a notação de integral.

TEOREMA – Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e seja $x \in \,]a,b[$.

Então,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

- **Obs:** Note-se que o teorema anterior garante que se f for contínua em $[a,b]$, então $\int_a^x f(t)\,dt$ é diferenciável em $[a,b]$, e por conseguinte também é contínua em $[a,b]$.

- **Ex. 20:** a) Calcule $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{2t}\,dt\right)$.

  b) Resolva a alínea anterior sem usar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

- **Ex. 21:** Estude a monotonia de $g(x) = \int_0^x t(t-1)e^{-2t}\,dt$ em $\mathbb{R}$.

5.2.2. Integrais Impróprios

Até agora estudou-se integrais $\int_a^b f(x)\,dx$, em que:

- o intervalo de integração $I = [a,b]$ é limitado;
- a função integranda f é limitada em $[a,b]$.

Consideramos agora casos em que uma das condições acima não se verifica.

DEFINIÇÃO – Integral Impróprio

Se I não for limitado ou se f não for limitada em $I = [a,b]$, então o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ designa-se por **integral impróprio**.

Alguns exemplos de integrais impróprios são os seguintes:

- $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$, pois o intervalo de integração é ilimitado;
- $\int_1^3 \frac{1}{1-x}\,dx$, pois a função integranda é ilimitada em $[1,3]$.

Cálculo de Integrais Impróprios
Se f é contínua em $[a, +\infty[$, então: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)\,dx$
Se f é contínua em $]-\infty, b]$, então: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim\limits_{z\to-\infty} \int_z^b f(x)\,dx$
Se f é contínua em $[a, b[$ e não for limitada numa vizinhança de b, então: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to b} \int_a^z f(x)\,dx$$
Se f é contínua em $]a, b]$ e não for limitada numa vizinhança de a, então: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a} \int_z^b f(x)\,dx$$

Em qualquer dos casos:

- se o limite existir e for finito, o integral do 1º membro diz-se **convergente**;
- se o limite não existir ou for infinito, o integral do 1º membro diz-se **divergente**.

- **Ex. 22:** Estude a convergência dos seguintes integrais:

  a) $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$

  b) $\int_1^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

  c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

  d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$