



2 horas

Nome: \_\_\_\_\_ nº: \_\_\_\_\_

**Espaço reservado para classificações**

1a.(15)	2a. (15)	3a.(15)	4a.(10)	5a.(15)	6a.(10)
1b.(10)	2b. (10)	3b.(10)	4b (15)	5b.(15)	6b.(15)
	2c. (20)				7. (20)

**Atenção: Todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.**

- Num determinado país existem 3 bancos (A,B e C) cujas quotas de mercado são 25%, 35% e 40% respetivamente. No banco A, a percentagem de clientes com cartão de crédito é de 50%, no banco B essa percentagem é de 30% e de 70% no banco C.
  - Qual a proporção de clientes bancários com cartão de crédito.
  - Dado que determinado cliente tem cartão de crédito, qual a probabilidade de ser cliente do banco B.

- Seja  $X$  uma variável aleatória com função de densidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,25x^3 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{outros } x \end{cases}$$

- Calcule  $P(X > 1)$  e obtenha  $E(X)$ .
- Determine a função de distribuição de  $X$ .
- Considere agora uma segunda variável aleatória,  $Y$ , tal que  $f_{Y|X=x}(y) = \frac{2y}{x^2}$ ,  $0 < y < x$  sendo  $x$  fixo com  $0 < x < 2$ . Obtenha a função densidade conjunta de  $(X,Y)$  e calcule  $P(X > 1, Y < 1)$ .

- Seja  $(X,Y)$  uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função probabilidade:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.1	$a$	$b$
2	0.05	$a$	0.3
3	0.05	0.2	0.1

Sabe-se ainda

que  $P(X = 2 | Y = 2) = 0.125$

- a. Mostre, justificando que se tem  $a = 0.05$  e  $b = 0.1$ . Serão as variáveis  $X$  e  $Y$  independentes?
  - b. Calcule  $Var(2X - 1)$ .
4. O número de chegadas a um balcão do Banco B segue um processo de Poisson com taxa média de 5 clientes por hora.
- a. Qual a probabilidade de entre as 10:00 e as 12:00 chegarem mais do que 10 clientes?
  - b. Qual a probabilidade de o primeiro cliente do dia chegar apenas meia hora após a abertura do balcão?
5. No Banco A, a decisão de conceder um empréstimo a um certo cliente é tomada de acordo com um modelo de pontuação de risco. Se a pontuação for superior a 50 então o empréstimo é concedido. Sabe-se por experiência passada que a pontuação obtida por um individuo tem distribuição normal com média 40 e desvio padrão 20.
- a. Qual a probabilidade de conceder um empréstimo? E qual a probabilidade de em 5 clientes conceder exatamente 2 empréstimos?
  - b. Qual a probabilidade aproximada de, em 300 clientes, o banco conceder empréstimo a mais do que 100 clientes?
6. O Rui, o José, o João e o António vão participar numa corrida de 21km. Combinaram entre eles que pagavam o jantar a quem cortasse primeiro a meta. Suponha que os tempos que cada um vai fazer na corrida, em horas, são independentes e têm todos distribuição exponencial de média 1.5.
- a. Qual a probabilidade do amigo que ganhou o jantar ter demorado menos de 1.25 horas (1 hora e 15 minutos)?
  - b. Qual a probabilidade do tempo total dos 4 amigos não exceder 7.5 horas?

7. Seja  $X$  uma população com distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$  da qual se vai recolher uma amostra casual de dimensão  $n$ . Sendo  $T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(X_i - 1)}{n}$  a estatística de interesse, prove que  $E(T) = \lambda^2$ .