



**Mestrado EAP**  
Tópicos de Estatística  
21.01.2019 - Duração: 2 horas

Nome: \_\_\_\_\_ Nº \_\_\_\_\_

1. Indique no enunciado se são verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes afirmações:
  - a. (+5/-5) A função de distribuição da amostra,  $F_n(x)$ , é, para cada  $x$ , uma v.a.;
  - b. (+5/-5)  $g(y) = n \theta \exp\{-y n \theta\}$  é a função densidade do mínimo amostral, de uma amostra de dimensão  $n$ , proveniente de uma população exponencial de média  $1/\theta$ ;
  - c. (+5/-5) O valor-p é a probabilidade de a hipótese nula estar corretamente especificada;
  - d. (+5/-5) Convergência em média quadrática implica convergência em probabilidade;
  - e. (+5/-5) A distribuição por amostragem da média amostral está centrada na média populacional independentemente da distribuição da população;
  - f. (+5/-5) Estimador da máxima verosimilhança é não enviesado;
  - g. (+5/-5) Intervalo de credibilidade HPD a 90% é um intervalo que atribui 5% de probabilidade a cada uma das abas da distribuição;
  - h. (+5/-5) O fator Bayes avalia a alteração das chances decorrente dos dados.
2. Seja  $X$  uma v.a. com densidade  $f(x; \theta) = \theta(\theta + 1)(1 - x)x^{\theta-1}$ ,  $0 < x < 1$ ,  $\theta > 0$ :
  - a. (10) Mostre que  $f(x; \theta)$  é da família exponencial;
  - b. (10) Mostre que  $\theta$  é parâmetro natural e derive a expressão de  $E[\text{Log}(X)]$
3. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra casual simples de uma população com função densidade  $f(x; \theta) = (\Gamma(4) \theta^4 x^5)^{-1} \exp\{-(\theta x)^{-1}\}$ ,  $x > 0$ ,  $\theta > 0$ . Sabe-se ainda que  $E(1/X) = 4\theta$  e  $\text{Var}(1/X) = 4\theta^2$ .
  - a. (10) Obtenha o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$ ;
  - b. (20) Mostre que o estimador da máxima verosimilhança é estatística suficiente para  $\theta$ ;
  - c. (20) Mostre que o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$  é não enviesado;
  - d. (10) Obtenha a quantidade de informação de Fisher;
  - e. (20) Mostre que o estimador da máxima verosimilhança para  $\theta$  é eficiente;
  - f. (20) Com base na distribuição assintótica do estimador da máxima verosimilhança, obtenha o intervalo de confiança a 95% para  $\theta$
4. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra casual simples de uma população Exponencial com média  $\theta^{-1}$ :
  - a. (10) Mostre que tem razão de verosimilhanças monótona;
  - b. (10) Obtenha a distribuição *a priori* não informativa para  $\theta$  com base na regra geral desenvolvida por Jeffreys;
  - c. (20) Considerando a *a priori* conjugada, proponha um estimador bayesiano para  $\theta$ .