Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1º Semestre 2019/2020
Época Normal: 13 de janeiro de 2020
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ln^2(x) - 1 \leq 0\}$ e $B = \left\{e - e^{(-1)^n n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de B.

(c) Escreva a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$, a fronteira de $A \cup \mathbb{Q}$, a fronteira de $A \cup \mathbb{Z}$ e o conjunto derivado de B.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists (a_n) \subseteq A,\ (a_n)$convergente : $\lim a_n \notin A$.

ii. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash A\ \exists \epsilon > 0 :]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap A = \emptyset$.

(4,0) 2. (a) Calcule, ou prove que não existe, $\lim \left(\operatorname{arccos}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \cos(n^2 + 1) + \sqrt[n]{\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}} \right)$.

(b) Calcule a primitiva da função $f(x) = x \ln(2x + 1)$ que passa no ponto $(0, 1)$.

(5,0) 3. Seja $k \in \mathbb{R}^+$, g uma função real de variável real tal que $g \in C^0(\mathbb{R})$ e considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{2x}^{0} g(t)\, dt, & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{x^k + 1} - e}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Estude, em função do valor de k, a continuidade de f em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

(b) Considere $k = 2$. Indique que condição a função g deve verificar de forma que a função f seja diferenciável em $x = 0$.

(c) Supondo que $g(x) = \dfrac{\arctan^3(x)}{1 + x^2}$ calcule, ou prove que não existe, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(2,0) 4. Sendo $f \in C^2(\mathbb{R})$ uma função real de variável real tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = f''(0) = -2$, escreva o polinómio de MacLaurin de 2ª ordem de $f \circ f$ e utilize o teorema de Taylor para calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(f \circ f)(x) - 4x + x^2}{x^2}.$$

(2,5) 5. Estude, em função do parâmetro $\alpha > 0$, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\left(x - 9x^3\right)(1 - \cos x)}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3} - x\right)^6 (x^\alpha - x^{\alpha+2})}} dx.$$

(2,5) 6. Seja f uma função real de variável real, de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e para a qual existe uma reta tangente ao gráfico de f que intersecta o gráfico em exatamente 2 pontos distintos. Prove que a função f'' tem pelo menos um zero em $\mathbb{R}$.