Época Normal - Janeiro de 2020 - soluções numéricas

1.a) $A = [\frac{1}{e}, e]$;

1.b) Supremo=e: máximo - não existe; ínfimo e mínimo-não existem porque B não é minorado;

1.c) $fr(A \cap \mathbb{Q}) = [\frac{1}{e}, e]$; $fr(A \cup \mathbb{Q}) =]-\infty, \frac{1}{e}] \cup [e, +\infty[$; $fr(A \cup \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \backslash \{1,2\} \cup \{\frac{1}{e}, e\}$; $B' = \{e\}$;

1.d) i) P:F pq A é um conjunto fechado;

ii) P:V pq $\mathbb{R} \backslash A$ é um conjunto aberto (visto que A é um conjunto fechado);

2.a) Limite da soma é a soma dos limites: para o 1º limite temos o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada que é portanto um infinitésimo; Para o segundo limite aplique $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (no caso deste ultimo existir) e conclua que o limite é $\frac{e^2}{4}$;

2.b) Comece por aplicar primitivação por partes e depois primitivação de funções racionais;

R:$\int f = \frac{x^2}{2} \ln(2x+1) - P(\frac{x^2}{2x+1}) + C = \frac{x^2}{2} \ln(2x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \ln(2x+1) + C$; sabendo que queremos a primitiva q passa no ponto $(0,1)$ obtemos $C = 1$;

3.a) Em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ f é contínua para todo o valor de $k \in \mathbb{R}^+$;

No ponto $x = 0$ a função só é contínua para $k > 1$;

3.b) $g(0) = -\frac{e}{2}$;

3.c) $-\frac{\pi^4}{64}$;

4. Polinómio MacLaurin $= 4x - 2x^2$; Valor do limite pedido é -1;

5. Conv sse $0 < \alpha < 20$; (no ponto 0 comparar c $1/x^{\frac{\alpha}{5}-3}$, no ponto $\frac{1}{3}$ comparar c $1/(\frac{1}{3} - x)^{\frac{1}{5}}$;

6. Seja $(a, f(a))$ ponto do gráfico de f:

reta tangente ao gráfico nesse ponto é $y = f'(a)(x-a) + f(a)$;

Sabendo que, para algum a esta reta interseta o gráfico de f em 2 pontos distintos temos que a função $h(x) = f(x) - f'(a)(x-a) + f(a)$ tem 2 zeros: (note que um deles é $x = a$): a e b; aplicando à função h o teorema de Rolle obtemos que existe c entre a e b para o qual se tem $h'(c) = 0$: observando que $h'(x) = f'(x) - f'(a)$ obtemos então que existe c entre a e b tal que $f'(c) = f'(a)$; para obter o resultado pretendido basta agora aplicar novamente Rolle ao intervalo entre a e c.