Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2008/2009

**EXAME FINAL 15 Janeiro 2009**

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere os conjuntos

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0,\ x, y, z > 0\right\},$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 - y^2 = z\}.$$

(a) Mostre que $M$, $N$ e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.

(b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2, 3, 4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

(3) Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral em $\Gamma$ da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in \Gamma,\ z \in [0,1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x,y,z) = (0,0,1)$ através de $M$.

(4) Considere o conjunto $\Omega = [0,1]$ e o subconjunto das partes de $\Omega$ dado por $\mathcal{A} = \{\{0\},\{1\}\}$. Indique a $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ gerada por $\mathcal{A}$. Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

(5) (a) Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n}\, dt.$$

(b) Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

*Sugestão:* Recorde que $1/(1-y) = \sum_{n\geq 0} y^n$ com $|y| < 1$. Use o teorema de Beppo-Levi.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2008/2009

**EXAME FINAL 30 Janeiro 2009**

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

(a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ onde $I$ é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ numa vizinhança $U$ de $(1, 1, 0)$.

(2) Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de $\gamma$.

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

(4) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\ \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

(a) Escreva uma representação paramétrica de $M$ e determine o integral de $f(x, y, z) = (x + y) \sin z$ em $M$.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de $M$ segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(5) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$. Determine a $\sigma$-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$. Nestas condições, construa uma medida de probabilidade.

(6) Calcule:

(a)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin^n(x + y)\, dx\, dy.$$

(b)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \left[ \frac{2n^2}{n^2 + x^2} + f(x^n) \right] dx,$$

onde $f \in C^0([0, 1])$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2009/2010

**EXAME FINAL 6 Janeiro 2010**

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere o conjunto

$$M = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = 1\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Mostre que $M$ é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a $M$ no ponto $(1,0,0,1)$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2$ em $M$.

*Sugestão*: Encontre o mínimo de $\varphi$ em $M$.

(2) Calcule:

(a) os pontos de

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2,\ 2x + z = 2\right\}$$

mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} e^{-y/x}\, \frac{y}{x}\, dx\, dy.$$

*Sugestão*: Use o teorema de Fubini.

(d) o integral

$$\int_V \operatorname{div} f$$

onde $f(x,y,z) = \big(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\big)$ e

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x-y < 1,\ 0 < x+y < 1,\ 0 < z < 1\}$.

(3) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$.

(a) Determine a $\sigma$-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu \colon \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto $B$. Mostre que $\mu$ é uma medida de probabilidade.

(4) Dado $q \in ]0,1[$ , mostre que a função $\mu$ definida em subconjuntos $A$ de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1-q)q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2009/2010

**EXAME FINAL 27 Janeiro 2010**

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de $\theta$ o conjunto $M_\theta$ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a $M_\theta$ no ponto $(0, -\theta, 1, 0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em $M_\theta$ com $\theta < 0$.

(2) Considere o caminho $\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t, \sin t, t)$$

e o campo vectorial

$$f(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}, z^2\right).$$

(a) Mostre que $f$ é o gradiente de uma função escalar.

(b) Calcule o integral do campo vectorial $f$ ao longo de $\gamma$.

(3) Considere o conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1,\ x^2 - 1 < y < x^2,\ x^3 < z < x^3 + 2\right\}.$$

(a) Decida se $h(x,y,z) = (x, y - x^2, z - x^3)$ é uma mudança de coordenadas em $S$ e determine $h(S)$.
*Sugestão*: Recorde que $h$ é uma mudança de coordenadas sse é $C^1$, injectiva e $\det Dh(x,y,z) \neq 0$.

(b) Indique o valor de

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

(4) Seja $f \colon E \to \mathbb{R}$ mensurável e $E$ um conjunto mensurável tal que $m(E) < +\infty$. Considere a função $\omega \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m\left(\{y \in E \colon f(y) > x\}\right).$$

(a) Determine $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$, $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$ e a monotonia de $\omega$.

(b) Qual a condição para que $\omega$ seja contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$.

(5) Dado $\lambda > 0$, mostre que a função $\mu$ definida em subconjuntos $A$ de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2010/2011

**EXAME ÉPOCA NORMAL 5 Janeiro 2011**

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere o conjunto

$$M_\theta = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = \theta,\ a + d = 0\right\}$$

e a função $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Determine para que valores de $\theta$ o conjunto $M_\theta$ é uma variedade diferencial e qual a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a $M_\theta$ no ponto $(0,-\theta,1,0)$ com $\theta \neq 0$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2\,|\theta|$ em $M_\theta$ com $\theta < 0$.

(2) Calcule:

(a) a massa do sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$$

sabendo que a densidade de massa é dada por

$$\rho(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}.$$

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x,y,z \geq 0\}.$$

(c) o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2+y^2)^{n/2}}{1 + (x^2+y^2)^{(n+3)/2}}\, dx\, dy.$$

(3) Calcule, para o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y < 1, 0 < y < x\},$$

o valor de

$$\int_A (x^2 - y^2) e^{-(x+y)^4} \, dx \, dy.$$

(4) Seja $\alpha > 0$. Considere a superfície

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = \alpha(x^2 + y^2), 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

e a normal unitária $\nu$ a $S_\alpha$ com terceira componente negativa. Determine o fluxo de $F(x,y,z) = (y^3, x^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$ através de $S_\alpha$ segundo $\nu$.

(5) Seja $\Omega$ um conjunto finito e não vazio. Considere a $\sigma$-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ contendo todos os subconjuntos de $\Omega$. Seja $p \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $p(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$, e

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

(a) Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \qquad A \subset \Omega$$

define uma medida de probabilidade em $\mathcal{P}(\Omega)$.

(b) Para $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ e $p(\omega) = \frac{1}{4}$, calcule $\int_\Omega \varphi \, d\mu$ onde $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 1$ se $\omega_1 = 0$ e $\varphi(\omega_1, \omega_2) = 0$ caso contrário.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2010/2011

**EXAME ÉPOCA RECURSO 26 Janeiro 2011**

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Justifique todos os cálculos

(1) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ y > 0\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície cilíndrica com eixo dado pela recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 1, y = 0\}$ e raio 2, mais próximo da origem.

(2) Seja $r > 0$ e

$$S_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y > 0\}.$$

Considere a normal unitária $\nu$ a $S_r$ cuja segunda componente é negativa. Calcule o valor de $r$ para o qual o fluxo de $F(x, y, z) = (z^2y^3, x^2 + z^2, x^2y^3)$ através de $S_r$ segundo $\nu$ é $-\pi$.

*Sugestão:* Note que $\nu$ não é necessariamente exterior.

(3) Calcule o integral de linha de

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

ao longo da fronteira do losango que une os pontos $(2, 0), (0, -2), (-2, 0), (0, 2)$ no sentido horário.

(4) Dado $\lambda > 0$, considere a seguinte função $\mu$ definida para subconjuntos $A$ de $\mathbb{N}$:

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}.$$

(a) Mostre que $\mu$ define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.

(b) Calcule o integral $\int_{\mathbb{N}} \varphi \, d\mu$ onde $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é dada por $\varphi(n) = n$ se $n \leq 3$ e $\varphi(n) = 0$ caso contrário.

(c) Calcule $\int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n} \, d\mu(n)$.

(5) Considere $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, dê um exemplo de um conjunto aberto $V$ tal que $A \subset V$ e $m(V) \leq \varepsilon$, onde $m$ é a medida de Lebesgue. *Sugestão*: Recorde que a união de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto.

(6) Seja a função em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$f(x) = \|x\|^{-\|x\|}.$$

Determine se $f$ é integrável à Lebesgue no seu domínio.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2011/2012

**EXAME ÉPOCA NORMAL 9 Janeiro 2012**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todos os cálculos*

(1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra "J".
  (b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x,y) = (1,0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

(2) Considere uma superfície $M$ em $\mathbb{R}^3$ parametrizada em torno do ponto $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ por $\phi\colon V \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(\theta, \varphi) = (\cos\theta\, \cos\varphi, \cos\theta\, \sin\varphi, \cos\theta),$$

com $V = ]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$.
  (a) Determine os espaços tangente e normal a $M$ em $p$.
  (b) Dada a função $f(x,y,z) = y$ em $\mathbb{R}^3$, calcule o integral de $f$ em $\phi(V)$.

(3) Calcule:
  (a) a distância média à origem dos pontos em $\mathbb{R}^2$ contidos num círculo com raio $R$ centrado na origem.
  (b) os pontos em $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 = z\}$ mais próximos de $(0,0,1)$.
  (c) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon r \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R,\ x,y,z \geq 0\},$$

onde $0 < r < R$.

(4) Considere a medida de contagem $\mu(A) = \#A$ com $A \subset \mathbb{N}$, e a função mensurável $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Definindo $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, calcule $\nu(\{1, 2, \dots, 10\})$ e mostre que $\nu$ é uma medida.

(b) Calcule $\int_A \frac{1}{n}\, d\nu(n)$ onde $A = \{1, 2, \dots, 10\}$.

(5) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Seja $A_k$, $k \in \mathbb{N}$, uma sucessão de conjuntos mensuráveis com medida total. Mostre que a sua intersecção também tem medida total.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2011/2012

**EXAME ÉPOCA RECURSO 25 Janeiro 2012**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todos os cálculos*

(1) (a) Parametrize uma curva no plano que descreva a letra "$\Omega$".
(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x,y) = (1,1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ao longo da curva da alínea anterior.

(2) Calcule:
(a) a distância média à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio $R$ centrada na origem.
(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 + x^2 \leq y^2,\ 0 < y < 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(3) Seja $\alpha > 0$ e

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z,\ z < \alpha\}.$$

(a) Determine a normal unitária exterior $\nu$ a $S_\alpha$.
(b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x,y,z) = (z^2y^3, x^2 + z^2, xy)$$

através de $S_\alpha$ segundo $\nu$.

(4) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

com $A \subset \mathbb{R}$, e a seguinte função

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{10} i\, \delta_i(A).$$

(a) Obtenha o valor de $\mu(\mathbb{R})$ e mostre que $\mu$ é uma medida.
(b) Calcule $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\, d\mu(n)$.

(5) Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue total é denso.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2012/2013

**EXAME ÉPOCA NORMAL 11 Janeiro 2013**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todos os cálculos*

(1) (a) Esboce a curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(2t), \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, e indique se é simples e se é fechada.

(b) Calcule o integral do campo vectorial $X(x, y, z) = (x, 1, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ao longo da curva parametrizada por $\phi(t) = (\sin(t), \sin(2t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(2) Considere a aplicação

$$\nu(A) = \int\int_A e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

para cada $A \subset \mathbb{R}^2$ mensurável à Lebesgue.

(a) Mostre que $\nu$ é uma medida.

(b) Calcule $\nu(B)$ onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 2, x > 0\}.$$

(3) Calcule:

(a) a média da distância à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio $R > 0$ centrada na origem.

(b) o ponto do plano $P = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mais perto da origem.

(4) Seja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, y > 0, 0 < z < 1\}.$$

(a) Mostre que $S$ é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 1, y > 0, 0 < z < 1\right\}.$$

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$X(x,y,z) = \left(x^2 y, \frac{x}{1+y^4}, \sqrt{z}\right)$$

pela fonteira de $D$.

(5) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma $\sigma$-álgebra de $\Omega$. Considere uma aplicação $\mu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para quaisquer dois conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{F}$. Mostre que $\mu$ é uma medida se verifica a seguinte propriedade:

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_k \subset A_{k+1}$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2012/2013

**EXAME ÉPOCA RECURSO 31 Janeiro 2013**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todos os cálculos*

(1) (a) Escreva a parametrização de uma curva em $\mathbb{R}^3$ com a forma $\infty$ e decida se é uma variedade diferencial.

(b) Calcule os espaços tangente e normal à curva da alínea anterior num ponto à sua escolha.

(2) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+$ uma função integrável à Lebesgue relativamente à medida de Lebesgue $m$ em $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação

$$\nu(A) = \int_A f\, dm$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^3$ mensurável à Lebesgue.

(a) Sabendo que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ para $A$ e $B$ conjuntos mensuráveis disjuntos, mostre que $\nu$ é aditiva para a união numerável. (Sugestão: use o teorema da convergência monótona)

(b) Calcule $\nu(B)$ onde

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\}.$$

(3) Calcule:

(a) o ponto na recta $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 + x_2 = 3\}$ mais perto da circunferência $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

(b) a média da distância ao eixo $\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in \mathbb{R}\}$ dos pontos contidos no cilindro

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq R, |z| \leq h\right\}$$

com $R, h > 0$.

(4) Seja

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = (z-1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2}\right\}.$$

(a) Mostre que $S$ é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine os vectores normais unitários em cada ponto da fronteira de

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < (z-1)^2, y > 0, 0 < z < \frac{1}{2}\right\}.$$

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial $X(x,y,z) = (y^2, x, (1-z)^{-1})$ pela fonteira de $D$.

(5) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ uma $\sigma$-álgebra de $\Omega$. Considere uma aplicação $\mu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos. Mostre que se

$$\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k)$$

para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis $A_{k+1} \subset A_k$, então $\mu$ é uma medida em $\mathcal{F}$.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2013/2014

**EXAME ÉPOCA NORMAL 13 Janeiro 2014**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1, x > 0\}.$$

(a) Mostre que $M$ é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine o espaço tangente e o espaço normal de $M$ no ponto $(1, 1)$.

(2) Calcule:

(a) o ponto de

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \|x - (1, 2, 3, 4)\| = 1\}$$

mais próximo da origem.

(b) o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

(3) Considere a hipérbole

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1\}$$

e recorde as funções hiperbólicas:

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}.$$

(a) Decida se a função $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, parametriza uma das componentes da hipérbole $H$. Em caso afirmativo, indique qual.

(b) Calcule o integral de linha de $f(x, y) = (x^{-2}, 0)$ ao longo de $H$ restringido ao primeiro quadrante.

(c) Decida se $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times ]0, 1[ \to \mathbb{R}^2$, $\phi(r, \theta) = (r\cosh\theta, r\sinh\theta)$, é uma transformação de coordenadas.

(d) Esboce

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = r^2, 1 < r < 2, 0 < y < \frac{e-1}{e+1}x\right\}$$

e calcule o integral em $S$ de

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right).$$

(4) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Prove que

(a) para $\lambda > 0$ e uma função mensurável $f \geq 0$, temos

$$\mu\left(\{x \in \Omega \colon f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega} f \, d\mu,$$

(b) se $A_k \in \mathcal{F}$ e $A_k \subset A_{k+1}$ com $k \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2013/2014

**EXAME ÉPOCA RECURSO 27 Janeiro 2014**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o hiperbolóide

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

(a) Qual a dimensão desta variedade?
(b) Calcule os espaços tangente e normal de $H$ no ponto $(1, 1, 1)$.
(c) Determine o ponto de $H \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 1\}$ mais próximo de $(1, 2, 3)$.

(2) Calcule:
(a) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{x}\, e^{-xy-y/x}\, dxdy.$$

(b) o centróide de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 1, |x| < 2\}$.

(3) Considere o conjunto $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \max_i |x_i| < 1\}$.
(a) Esboce a fronteira de $D$ e determine a normal exterior unitária em cada ponto.
(b) Calcule

$$\int_D \operatorname{div} X$$

onde $X$ é o campo vectorial dado por

$$X(x, y, z) = (e^{x^2yz}, \cos(xy^2z), e^{\sin(xyz^2)}).$$

(4) Considere a $\sigma$-álgebra $\mathcal{M}$ de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Seja $\mu = m + \delta_0$ onde $m$ é a medida de Lebesgue e $\delta_0$ é a medida de Dirac no ponto 0. Mostre que:

(a) $\mu$ é uma medida em $\mathcal{M}$ e que para qualquer função simples $\varphi$ e qualquer conjunto mensurável $A$ temos que

$$\int_A \varphi \, d\mu = \int_A \varphi \, dm + \varphi(0).$$

(b) para qualquer função mensurável $f$ temos que

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f \, dm + f(0),$$

e calcule

$$\int_{[0,2\pi]} \sin(x) \, d\mu(x).$$

(5) Seja $\Omega$ um conjunto finito. Determine o cardinal do conjunto das partes de $\Omega$.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2014/2015

**EXAME ÉPOCA NORMAL 12 Janeiro 2015**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o campo vectorial

$$X(x,y,z) = \frac{1}{4}(x^3, y^3, z^3), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

a função $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot X(x,y,z)$ e a superfície esférica

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

(a) Mostre que $M$ é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão e os espaços tangente e normal em cada ponto.
(b) Encontre e classifique os extremos globais de $f$ em $M$.
(c) Determine o integral de $f$ em $M$ usando o teorema da divergência.

(2) Recorde as funções hiperbólicas

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \qquad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0, x \cosh y < 1\}$$

(a) Mostre que $\phi(x,y) = (xe^y, xe^{-y})$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e determine $\phi^{-1}$.
(b) Esboce $A$ e $\phi(A)$.
(c) Calcule a área de $A$.

(3) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ considere $\mathcal{A}_\alpha = \{\{\alpha\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Calcule:

(a) a $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathcal{A}_\alpha)$ gerada por $\mathcal{A}_\alpha$.

(b) $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \sigma(\mathcal{A}_\alpha)$.

(4) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

(a) Considere uma sucessão de conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \dots$ disjuntos dois a dois tais que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$. Dado $D \in \mathcal{F}$ calcule

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap D).$$

(b) Dada uma função mensurável $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ prove usando o teorema da convergência monótona que

$$\int_\Omega f\, d\mu \geq \inf_{x\in\Omega} f(x)\, \mu(\Omega).$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

# Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2014/2015

## EXAME ÉPOCA RECURSO 26 Janeiro 2015

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ e uma função $f \colon D \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$.

(a) Calcule a divergência do gradiente de $f$ e a normal unitária exterior à fronteira de $D$ em cada ponto.

(b) Para $f(x, y) = x + y^2$ e usando o teorema da divergência, encontre o valor do integral

$$\int_D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dxdy.$$

(c) Determine e classifique os extremos da função $f$ (dada na alínea anterior) na fronteira de $D$.

(2) Considere o conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0, 0 < x \frac{e^y + e^{-y}}{2} < 1 \right\}$$

(a) Mostre que $\phi(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e determine $\phi^{-1}$.

(b) Esboce $A$ e $\phi(A)$.

(c) Calcule a primeira componente do centróide de $A$.

(3) Considere a função $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} [|\sin x|], & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\}$ indica a parte inteira de $x$.

(a) Mostre que $\varphi$ é uma função simples relativamente à $\sigma$-álgebra de Borel.

(b) Sendo $m$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, calcule $\int_{[0,2\pi]} \varphi \, dm$.

(4) Dê um exemplo de uma medida $\mu$ em $\mathbb{R}$ tal que para qualquer função mensurável $f$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{10} f(1/n).$$

(5) Seja $\Omega$ um conjunto finito e $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função não negativa tal que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

Decida se a aplicação $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, $A \subset \Omega$, é uma medida de probabilidade.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2015/2016

**EXAME ÉPOCA NORMAL 15 Janeiro 2016**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

PARTE I

(1) Considere o conjunto

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2\right\} \setminus \{(0,0,0)\}.$$

(a) Mostre que $M$ é uma variedade diferencial, indique a sua dimensão e os espaços tangente e normal em cada ponto.

(b) Encontre e classifique os extremos de $f(x,y,z) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4)$ em $M$.

(c) Calcule o fluxo do campo vectorial $X(x,y,z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de $M \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2}\}$ segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(2) Calcule:

(a)

$$\int_V \operatorname{div} f$$

onde $f(x,y,z) = \left(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\right)$ e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x - y < 1, 0 < x + y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(b)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

PARTE II (2º Teste)

(3) Considere a superfície

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\, z > \frac{\pi}{2}\right\}.$$

(a) Indique o integral de $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}$ em $M$.

(b) Determine o integral de linha de

$$X(x, y, z) = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z}, -\frac{x+y}{z^2}\right)$$

ao longo do bordo de $M$.

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f \colon \Omega \to \Omega$ e

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega \colon f^{-1}(A) = A\}.$$

(a) Mostre que $(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço mensurável.

(b) Considere uma medida $\mu$ em $(\Omega, \mathcal{F})$ e $A, B \in \mathcal{F}$ disjuntos. Calcule

$$\int_{f^{-1}(B)} \mathcal{X}_A \circ f \, d\mu.$$

(5) Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n} \, dt.$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2015/2016

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 2 Fevereiro 2016**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

PARTE I

(1) Considere a função $f(x,y,z) = x+y+z+xyz$ definida em $\mathbb{R}^3$, o conjunto aberto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < 1, 0 < z < 1\right\},$$

a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1, 0 < z < 1\right\}$$

e a curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 1, z = 0\right\}.$$

(a) Escreva a normal exterior unitária em cada ponto da fronteira de $A$.

(b) Calcule o gradiente de $f$ e determine o seu fluxo através da fronteira de $A$ segundo a normal exterior unitária.

(c) Encontre e classifique os extremos de $f$ em $S$ e em $C$.

(d) Determine o valor médio de $f$ em $A$.

(e) Determine o valor médio de $f$ em $S$ e em $C$.

PARTE II (2º Teste)

(2) Considere a curva
$$\Gamma = \left\{ \left( \cos t, \sqrt{2} \sin t, -\cos t \right) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in [0, \pi] \right\}.$$

(a) Indique o comprimento de $\Gamma$.

(b) Determine o integral de linha ao longo de $\Gamma$ de
$$X(x, y, z) = \left( 2xyz, x^2 z, x^2 y + e^z \right).$$

(3) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade e considere os conjuntos mensuráveis $A, B \in \mathcal{F}$ com $\mu(A) = 1$. Calcule $\mu(B) - \mu(B \cap A)$.

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dê um exemplo de uma função $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ que seja $\mathcal{F}$-mensurável com $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(5) Calcule
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \sin(e^{-x}) e^{-nx} \, dx$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2016/2017

**EXAME ÉPOCA NORMAL 9 Janeiro 2017**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere os conjuntos

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1, x \le 0\}$$
$$M_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2/4 + y^2 = 1, x > 0\right\}$$
$$M = M_1 \cup M_2.$$

(a) Determine se $M_2$ é uma variedade. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.

(b) Encontre, se possível, parametrizações de $M$ em redor dos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$.

(c) Esboce $M$ e determine se $M$ é uma variedade. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.

(d) Calcule o máximo de $f(x,y) = x + y$ em $M$.

(e) Seja $X(x,y) = (x/2, y/2)$. Calcule o fluxo de $X$ através de $M$ segundo a normal unitária exterior.

(2) Calcule:

(a)

$$\int_V \operatorname{div} f(x,y,z)\,dxdydz$$

onde $f(x,y,z) = \big(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\big)$ e

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x-y < 1, 0 < x+y < 1, 0 < z < 1\}$.

(b)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx.$$

(3) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac em $\mathbb{R}$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}$, e $m$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\mu = \delta_1 + \delta_2$ é uma medida e calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,d\mu(x).$$

(b) Se para qualquer conjunto $A$ mensurável à Lebesgue definirmos

$$\mu(A) = m(A \cap [1,2])$$

(i.e. $\mu$ é a medida de Lebesgue em $[1,2]$), determine

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,d\mu(x).$$

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}\delta_i.$$

Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,d\mu_n(x).$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2016/2017

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 31 Janeiro 2017**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \cos t(\cos t, \sin t) - \frac{1}{2}(1,0).$$

(a) Esboce $\Gamma = \gamma([0,\pi])$ e indique se é uma variedade.

(b) Em cada ponto $(x,y) \in \Gamma$ determine uma normal unitária $\nu(x,y)$ tal que $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$ seja contínua.

(c) Calcule o integral de linha de $\nu$ ao longo de $\Gamma$.

(d) Calcule o comprimento de $\Gamma$.

(2) Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)^{5/4}}, dxdy.$$

(3) Considere

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \leq 1, x > 0, y > 0\right\}.$$

(a) Encontre o centróide de $A$ usando as coordenadas toroidais:

$$\begin{cases} x = (3 + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (3 + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

(b) Calcule o integral em $A$ da divergência de

$$X(x,y,z) = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}-3}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x,0).$$

(4) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e os subconjuntos disjuntos não-vazios $A, B \subset \Omega$. Considere as $\sigma$-álgebras

$$\mathcal{F}_A = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$
$$\mathcal{F}_B = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}.$$

(a) Dê um exemplo de uma função $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que seja $\mathcal{F}_B$-mensurável mas não seja $\mathcal{F}_A$-mensurável.

(b) Indique a menor $\sigma$-álgebra para a qual a função $f = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$ é mensurável.

(5) Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \operatorname{arctg}\left(|x|^n + |y|^n\right)\, dxdy$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2017/2018

**EXAME ÉPOCA NORMAL 8 Janeiro 2018**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Sejam $a, b > 0$. Considere os conjuntos

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = a^2, x \leq 0\}$$

$$M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, x > 0\right\}$$

$$M = M_1 \cup M_2.$$

(a) Determine se $M_2$ é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.

(b) Encontre parametrizações de $M$ em redor dos pontos $(0, a)$ e $(0, -a)$.

(c) Determine se $M$ é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço tangente em cada um dos seus pontos.

(d) Calcule o máximo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $M$ para $a = 1$ e $b = 2$.

(e) Seja $X(x, y) = (x/2, y/2)$. Calcule o fluxo de $X$ através de $M$ segundo a normal unitária exterior para $a = 1$ e $b = 2$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1\}.$$

(b)

$$\int_V \operatorname{div} f(x,y,z)\, dxdydz$$

onde $f(x,y,z) = \big(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\big)$ e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x-y < 1, 0 < x+y < 1, 0 < z < 1\}.$$

(c)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2/(1+n)}\, dx.$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}\, dx.$$

(3) Dado $a \in \mathbb{R}$, considere a medida de Dirac em $\mathbb{R}$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(A)$$

define uma medida de probabilidade.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2017/2018

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 30 Janeiro 2018**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Determine se

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon F(x,y) = 0\}$$

é uma variedade para cada um dos seguintes casos:

(a)

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & x < 0 \\ x + |y| - 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(b)

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (x^2 - y^3).$$

(2) Considere

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \leq 1, z > 0 \right\}.$$

(a) Encontre o centróide de $A$ usando as coordenadas toroidais:

$$\begin{cases} x = (3 + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (3 + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

(b) Calcule o integral em $A$ da divergência de

$$X(x,y,z) = \frac{2\sqrt{x^2+y^2} - 3}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y, x, 0).$$

(3) Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-3t, 3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \left(\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (3t-2, 3t-3), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(a) Esboce $\Gamma = \gamma([0,1])$ e indique se é uma variedade.

(b) Calcule

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma$$

para

$$X(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}(1,0), & x < 0 \\ (1,1), & x \geq 0. \end{cases}$$

(4) Calcule

(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx^2}}\, dx.$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1-e^x}\, dx.$$

(5) Considere as medidas $\mu_1$ e $\mu_2$ num espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, tais que

$$\mu_1(\Omega) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_2(\Omega) = 10.$$

Dados $x, y \geq 0$ seja

$$\mu = x\mu_1 + y\mu_2.$$

(a) Encontre os valores de $x$ e $y$ para os quais $\mu$ é uma medida de probabilidade.

(b) Qual o máximo da função $\varphi(x,y) = xy$ quando $x$ e $y$ estão nas condições da alínea anterior?

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2018/2019

**EXAME ÉPOCA NORMAL 4 Janeiro 2019**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere os seguintes conjuntos

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$$
$$N = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xyz = 0\right\}.$$

(a) Mostre que $M$ é uma variedade, indicando a sua dimensão e o espaço normal em cada ponto.

(b) Encontre uma parametrização de $M$ e o espaço tangente em cada ponto.

(c) Seja o campo vectorial

$$X(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}(1, 1, 0).$$

Calcule o fluxo de $X$ através de $M$ segundo a normal unitária com terceira coordenada positiva.

(d) Determine se $N$ é variedade e, em caso afirmativo, indique a dimensão e o espaço tangente em cada ponto.

(e) Encontre e classifique os extremantes em $N$ de

$$f(x, y, z) = xyz + (z - 1)^2.$$

(2) Considere as medidas $\mu_1$ e $\mu_2$ num espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, tais que

$$\mu_1(\Omega) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_2(\Omega) = 10.$$

Dados $x, y \geq 0$ seja

$$\mu = x\mu_1 + y\mu_2.$$

(a) Encontre os valores de $x$ e $y$ para os quais $\mu$ é uma medida de probabilidade.

(b) Qual o máximo da função $\varphi(x, y) = xy$ quando $x$ e $y$ estão nas condições da alínea anterior?

(3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$D_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Calcule:

(a) o centróide de $D_n$.

(b) o fluxo pela fronteira de $D_n$ do campo vectorial

$$X(x, y, z) = \left(x^2 y, \frac{x}{1 + y^4}, \sqrt{z}\right).$$

(c)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{D_n} xyz \, dx \, dy \, dz.$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2018/2019

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 1 Fevereiro 2019**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Seja $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-3t, 3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ \left(\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ (3t-2, 3t-3), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

(a) Esboce $\Gamma = \gamma([0,1])$ e indique se é uma variedade.

(b) Calcule

$$\int_\Gamma X \cdot d\gamma$$

para

$$X(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}(1,0), & x < 0 \\ (1,1), & x \ge 0. \end{cases}$$

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$D_n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2+y^2 \le 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i},\, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Calcule:

(a) o centro de massa de $D_n$ para a função densidade $\rho(x,y,z) = z^2$.

(b) o centro de massa da fronteira de $D_n$ para a função densidade $\rho_n(x,y,z) = 1/2^n - x^2 - y^2$.

(c) o integral em $D_n$ da divergência do campo vectorial

$$X(x,y,z) = \left(x^2y, \frac{x}{1+y^4}, \sqrt{z}\right).$$

(d)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

onde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é integrável à Lebesgue.

(3) (a) Seja $\Omega$ um conjunto infinito e $\mathcal{A}$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de $\Omega$. $\mathcal{A}$ é uma $\sigma$-algebra?

(b) Seja $\Omega$ um conjunto qualquer. Determine $\sigma(\{\{x\}\colon x \in \Omega\})$.

(4) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e funções $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ e $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis relativamente a $\mathcal{F}$ e integráveis. Seja ainda $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ uma $\sigma$-álgebra e $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável relativamente a $\mathcal{A}$ e integrável. Decida se as seguintes proposições são verdadeiras. Se sim, escreva uma demonstração. Se não, apresente um contra-exemplo.

(a) Se $\int_B f\, d\mu = \int_B g\, d\mu$ para qualquer $B \in \mathcal{F}$, então $f = g$ q.t.p.

(b) Se $\int_A f\, d\mu = \int_A h\, d\mu$ para qualquer $A \in \mathcal{A}$, então $f = h$ q.t.p.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2019/2020

**EXAME ÉPOCA NORMAL 7 Janeiro 2020**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere a função $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$$

e o campo vectorial $X(x, y) = (y, x)$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Esboce $M = \phi(\mathbb{R})$.

(b) Decida se $M$ é uma variedade e qual a sua dimensão.

(c) Calcule o comprimento de $M$.

(d) Dado conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon e^{-2\pi} \leq \|(x, y)\| \leq 1\},$$

calcule

$$\int_{M\cap B} X \cdot d\phi$$

(e) Mostre que em cada ponto $(x, y) \in M$ o vector

$$\nu(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(x - y, x + y)}{\|(x, y)\|}$$

é normal a $M$ e unitário.

(f) Determine o fluxo de $X$ em $M \cap B$ segundo $\nu$, ou seja, o integral

$$\int_{M\cap B} X \cdot \nu \, dv_1.$$

(g) Seja $\mathcal{M}$ a colecção dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}$ a colecção de todos os subconjuntos de $M$. A intersecção $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}$ é uma $\sigma$-álgebra de $M$?

(2) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

(a) Considere uma sucessão de conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos dois a dois tais que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$. Dado $D \in \mathcal{F}$, calcule

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap D).$$

(b) Se $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, prove usando o teorema da convergência monótona que

$$\int_\Omega f\, d\mu \geq \inf_{x \in \Omega} f(x)\, \mu(\Omega).$$

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2019/2020

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 3 Fevereiro 2020**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de $\gamma$.

(2) Calcule:

(a) a média da distância à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio $R > 0$ centrada na origem.

(b) o ponto do plano $P = \{x \in \mathbb{R}^4\colon x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mais perto da origem.

(3) Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função densidade dada por

$$\rho(x) = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$$

e o conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon \max_{i=1,\dots,n} |x_i| < 1 \right\}.$$

(a) Calcule o centro de massa de $S$ relativo a $\rho$.

(b) Determine a normal exterior unitária em cada ponto na fronteira de $S$.

(c) Seja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada contínua. Se $X(x) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ é um campo vectorial em $S$, indique o valor de

$$\int_S \operatorname{div} X(x)\, dx.$$

(4) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja mensurável relativamente à $\sigma$-álgebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^-\}$.

(5) Considere a sucessão de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{nx^2}{n^2+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) Para cada $x \in [0,1]$, calcule

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

(b) Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2019/2020

**EXAME ÉPOCA NORMAL 7 Janeiro 2020**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere a função $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$$

e o campo vectorial $X(x, y) = (y, x)$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Esboce $M = \phi(\mathbb{R})$.

(b) Decida se $M$ é uma variedade e qual a sua dimensão.

(c) Calcule o comprimento de $M$.

(d) Dado conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon e^{-2\pi} \leq \|(x, y)\| \leq 1\},$$

calcule

$$\int_{M\cap B} X \cdot d\phi$$

(e) Mostre que em cada ponto $(x, y) \in M$ o vector

$$\nu(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(x - y, x + y)}{\|(x, y)\|}$$

é normal a $M$ e unitário.

(f) Determine o fluxo de $X$ em $M \cap B$ segundo $\nu$, ou seja, o integral

$$\int_{M\cap B} X \cdot \nu \, dv_1.$$

(g) Seja $\mathcal{M}$ a colecção dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}$ a colecção de todos os subconjuntos de $M$. A intersecção $\mathcal{F} = \mathcal{M} \cap \mathcal{P}$ é uma $\sigma$-álgebra de $M$?

(2) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

   (a) Considere uma sucessão de conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos dois a dois tais que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$. Dado $D \in \mathcal{F}$, calcule
   $$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i \cap D).$$

   (b) Se $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, prove usando o teorema da convergência monótona que
   $$\int_\Omega f \, d\mu \geq \inf_{x \in \Omega} f(x) \, \mu(\Omega).$$

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

**Análise Matemática III – 2º ano MAEG**

1º Semestre 2019/2020

**EXAME ÉPOCA DE RECURSO 3 Fevereiro 2020**

*Duração máxima: 2 horas*

*Cada alínea vale 2 valores*

*Sem consulta, sem calculadora*

*Justifique todas as respostas*

(1) Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de $\gamma$.

(2) Calcule:

(a) a média da distância à origem dos pontos de $\mathbb{R}^3$ contidos no interior da esfera com raio $R > 0$ centrada na origem.

(b) o ponto do plano $P = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 3\}$ mais perto da origem.

(3) Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função densidade dada por

$$\rho(x) = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$$

e o conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \max_{i=1,\dots,n} |x_i| < 1 \right\}.$$

(a) Calcule o centro de massa de $S$ relativo a $\rho$.

(b) Determine a normal exterior unitária em cada ponto na fronteira de $S$.

(c) Seja $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada contínua. Se $X(x) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ é um campo vectorial em $S$, indique o valor de

$$\int_S \mathrm{div} X(x)\, dx.$$

(4) Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja mensurável relativamente à $\sigma$-álgebra $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^-\}$.

(5) Considere a sucessão de funções $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - \frac{nx^2}{n^2+1}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) Para cada $x \in [0,1]$, calcule

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

(b) Calcule

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$