Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2017/2018

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA RECURSO

6 de Julho 2018

Duração: 2h30

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

Parte I

(1) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período. (2 valores)

(b) Determine as distribuições estacionárias da cadeia. (1 valor)

(c) Calcule a probabilidade da cadeia ser absorvida pelo estado 0 sabendo que $X_0 = 1$. (1 valor)

(2) Os colaboradores de uma empresa de software podem assumir as funções de programador ou gestor. Em cada ano, 50% dos programadores continuam na mesma função, 25% são promovidos a gestores e 15% mudam para a concorrência. No caso dos gestores, 50% permanecem na mesma função enquanto que 40% mudam para a concorrência. Em qualquer caso, 10% dos coloboradores são despedidos anualmente.

(a) Calcule a probabilidade de um gestor mudar para a concorrência após 2 anos na empresa. (1 valor)

(b) Determine o tempo médio (em anos) que um colaborador trabalha na empresa. (2 valores)

(c) Calcule a probabilidade de um programador/gestor ser despedido. (1 valor)

(3) Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ processos de Poisson independentes com intensidade $\lambda > 0$.

(a) Calcule a probabilidade de observar pelo menos uma ocorrência do processo $N_1(t)$ e zero ocorrências do processo $N_2(t)$. (1 valor)

(b) Calcule o tempo médio do primeiro instante em que ambos os processos têm pelos menos uma ocorrência. (1 valor)

Parte II

(4) Seja $X(t)$ um processo de nascimento e morte com estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ e parâmetros $\lambda_n = \alpha(N-n)$ e $\mu_n = \beta n$ onde $\alpha, \beta > 0$.

(a) Escreva a equação progressiva de Kolmogorov para $p_{0,0}(t)$. (1 valor)

(b) Mostre que o processo tem distribuição estacionária

$$\pi_k = C_k^N \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{N-k}, \quad k = 0, \ldots, N$$

(2 valores)

(c) Supondo que $N = 2$ e $\alpha = \beta$, calcule

$$\lim_{t\to\infty} E(X(t))$$

(1 valor)

(5) Pacientes chegam a um consultório médico seguindo um processo de Poisson com intensidade de 3 pacientes por hora. O único médico disponível demora em média 15 minutos a atender cada paciente.

(a) Calcule a probabilidade de um paciente ser imediatamente atendido após chegar ao consultório. (1 valor)

(b) Determine o tempo médio que um paciente espera até ser atendido pelo médico. (1 valor)

(c) Durante o inverno o número médio de pacientes que chegam ao consultório médico duplica para 6 pacientes por hora. Determine novamente o tempo médio que um paciente espera até ser atendido supondo que o consultório contratou mais um médico. (1 valor)

(6) Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ dois movimentos Brownianos independentes. Considere a combinação linear

$$Z(t) = \alpha X(t) + \beta Y(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Determine os valores de α e β tais que $Z(t)$ é um movimento Browniano. (2 valores)

(b) Supondo que $\alpha = \beta = 1$, determine a distribuição de probabilidade de $Z(t) + Z(s)$ onde $t > s$. (1 valor)