Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2017/2018

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA NORMAL

11 de Junho 2018

Duração: 2h30

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

Parte I

(1) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período. (2 valores)

(b) Determine as distribuições estacionárias da cadeia. (1 valor)

(c) Calcule $E(T|X_0=4)$ onde $T=\min\{n\geq 0\colon X_n\in\{0,1\}\}$. (1 valor)

(2) Considere um modelo de aprovisionamento onde determinado artigo é aprovisionado de modo a satisfazer certa procura. Em cada período, há uma procura de 0, 1 ou 2 artigos com probabilidade 1/2, 1/4 e 1/4, respetivamente. O stock máximo do artigo é de duas unidades. O nível de stock é examinado no final de cada período. Em caso de ruptura (número de artigos menor ou igual a zero) é reposto o stock máximo para o período seguinte.

(a) Seja X_n a variável aleatória que representa o número de artigos no final do período n. Modele X_n usando uma cadeia de Markov e determine a matriz de transição. (1 valor)

(b) Determine a fracção de tempo em que a oferta é igual à procura, isto é, o número de artigos é igual a zero. (2 valores)

(c) Determine o nível médio de stock a longo prazo. (1 valor)

(3) (2 valores) Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade 1 e W_n o tempo de ocorrência do n-ésimo evento. Calcule:

(a) $\mathbb{P}(N(3)=4|N(1)=2)$

(b) $E(W_4|N(1)=2)$

Parte II

(4) Um laboratório de biologia tem 2 microscópios e um técnico responsável pela sua manutenção. Suponha que cada microscópio trabalha durante um tempo médio μ^{-1} dias até necessitar de manutenção e o técnico demora em média λ^{-1} dias para realizar a respectiva manutenção. Seja $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ o número de microscópios a funcionar no instante t.

(a) Supondo que a intensidade de avaria é proporcional ao número de microscópios em funcionamento, use um processo de nascimento e morte para modelar $X(t)$. Determine a matriz de intensidades que caracteriza o processo. (1 valor)

(b) Supondo que $\lambda = 3$ e $\mu = 2$ determine:

(i) a distribuição estacionária; (1 valor)

(ii) a fracção de tempo (longo prazo) que o técnico não repara um microscópio; (1 valor)

(iii) o número médio (longo prazo) de microscópios em funcionamento. (1 valor)

Caso não tenho respondido à alínea (a) use a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(5) Clientes chegam a uma agência de viagens seguindo um processo de Poisson com intensidade de 4 clientes por hora.

(a) Determine o tempo máximo (em minutos) que o funcionário pode dedicar a cada cliente sem que o número médio de clientes na agência seja superior a 2 clientes. (1 valor)

(b) Supondo que o funcionário dedica (em média) 10 minutos para atender cada cliente, calcule a probabilidade de encontrar 2 ou mais clientes em fila de espera. (1 valor)

(6) Seja $(\xi_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias iid tal que $\xi_n = \pm 1$ com igual probabilidade. Considere o passeio aleatório $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Suponha que a evolução de um certo activo financeiro é dada por

$$Z_n = e^{\mu n + \sigma X_n}, \quad n \geq 1$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.

(a) Determine μ dependendo de σ tal que Z_n é uma martingala. (1 valor)

(b) Supondo que Z_n é uma martingala calcule:

(i) $E(Z_n)$. (1 valor)

(ii) $E(e^{\mu\tau})$ onde $\tau = \min\{n \geq 1 \colon X_n = 1\}$. (2 valores)