Universidade de Lisboa – ISEG
Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
2º Semestre 2016/2017

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA RECURSO
7 de Julho 2017

Duração: 2h

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (6 valores) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação e classifique os respectivos estados (recorrente/transiente).

   (b) Determine o período do estado 1.

   (c) Determine as distribuições estacionárias da cadeia.

   (d) Calcule a probabilidade de partindo do estado 2 a cadeia ser absorvida pelo estado 4.

2. (4 valores) Considere uma partida de ténis no momento em que um *deuce* é atingido. Um jogador ganha a *vantagem* se fizer o ponto seguinte. De seguida ou ganha a partida ou o jogo regressa a *deuce*. Suponhamos que, para qualquer ponto, a probabilidade de o jogador A ganhar o ponto é 0.6 e a probabilidade de o jogador B ganhar o ponto é 0.4.

   (a) Modele o jogo usando uma cadeia de Markov com espaço de estados: 1 - A ganha a partida, 2 - B ganha a partida, 3 - *deuce*, 4 - A tem *vantagem*, 5 - B tem *vantagem*.

(b) Partindo do *deuce* calcule:

   i. a probabilidade de o jogador A ganhar a partida;

   ii. o tempo médio (número de pontos) da partida de ténis.

3. (3 valores) Pacientes chegam a um consultório médico seguindo um processo de Poisson com intensidade de 1 paciente de 10 em 10 minutos. O médico começa por examinar o primeiro paciente só após o terceiro paciente chegar ao consultório.

   (a) Calcule o tempo médio entre a abertura do consultório e o instante em que o primeiro paciente começa a ser examinado.

   (b) Calcule a probabilidade de durante a primeira hora o médico não examinar nenhum paciente.

   (c) Três horas após a abertura do consultório chegou apenas um paciente. Calcule a probabilidade desse paciente ter chegado durante as primeiras duas horas.

4. (5 valores) Um laboratório de biologia tem 2 microscópios e 2 técnicos responsáveis pela sua manutenção. Suponha que cada microscópio trabalha durante um tempo médio de 6 meses até necessitar de manutenção e o técnico responsável demora em média 1 mês para realizar a respectiva manutenção. Seja $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ o número de microscópios a funcionar no instante t.

   (a) Supondo que a intensidade de avaria é proporcional ao número de microscópios em funcionamento, use um processo de nascimento e morte para modelar $X(t)$. Determine a matriz de intensidades que caracteriza o processo.

   (b) Escreva a equação regressiva de Kolmogorov para $P'_{1,2}(t)$.

   (c) Determine:

      i. a distribuição estacionária;

      ii. a fracção de tempo (longo prazo) de funcionamento simultâneo dos microscópios;

      iii. o número médio (longo prazo) de microscópios em funcionamento.

5. (2 valores) Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com estados $\{0,1\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Considere um processo de Poisson $N(t)$ com parâmetro $\lambda > 0$ e independente da cadeia $(Y_n)_{n\geq 0}$. Mostre que

$$X(t) = Y_{N(t)}$$

é um processo de nascimento e morte com dois estados $\{0,1\}$ e determine os parâmetros do processo em função de α e λ.