Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2016/2017

Processos Estocásticos e Aplicações

EXAME ÉPOCA NORMAL

19 de Junho 2017

Duração: 2h

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (6 valores) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação e classifique os respectivos estados (recorrente/transiente).
   (b) Determine o período do estado 0.
   (c) Determine as distribuições estacionárias da cadeia.
   (d) Calcule a probabilidade de partindo do estado 2 a cadeia ser absorvida pelo estado 4.

2. (4 valores) Os colaboradores da empresa *iFired* podem assumir a função de programador ou a função de gestor. Em cada ano, 70% dos programadores continuam na mesma função, 20% assumem a função de gestores e 10% são despedidos. No caso dos gestores, em cada ano 95% permanecem na mesma função enquanto que 5% são despedidos.
   (a) Quanto tempo em média um colaborador trabalha na *iFired* até ser despedido.
   (b) Para combater a insatisfação dos colaboradores a *iFired* promove anualmente 5% dos gestores a sócios (não podem ser despedidos), 90% continuam em funções e os restantes 5% são despedidos. Determine a probabilidade de um programador vir a ser despedido.

3. (3 valores) Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade 1 e W_n o tempo de ocorrência do n-ésimo evento. Calcule:

   (a) $\mathbb{P}(N(2) = 4|N(1) = 3)$

   (b) $E(N(5)|N(3) = 2)$

   (c) $\mathbb{P}(W_1 \leq 2|N(3) = 1)$

4. (5 valores) Um laboratório de computadores tem 2 impressoras e um técnico responsável pela sua manutenção. Suponha que cada impressora trabalha durante um tempo médio μ^{-1} dias até necessitar de manutenção e o técnico demora em média λ^{-1} dias para realizar a respectiva manutenção. Seja $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ o número de impressoras a funcionar no instante t.

   (a) Supondo que a intensidade de avaria é proporcional ao número de impressoras em funcionamento, use um processo de nascimento e morte para modelar $X(t)$. Determine a matriz de intensidades que caracteriza o processo. Se não respondeu a esta questão use a matriz
$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) Escreva a equação progressiva de Kolmogorov para $P'_{1,2}(t)$.

   (c) Supondo que $\lambda = 2$ e $\mu = 1$ determine:

      i. a distribuição estacionária;

      ii. a fracção de tempo (longo prazo) de funcionamento simultâneo das impressoras;

      iii. o número médio (longo prazo) de impressoras em funcionamento.

5. (2 valores) Seja S_t o preço de um activo financeiro no instante t e suponha que
$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^{N(t)} X_i,$$
onde $S_0 > 0$ é o valor inicial, $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, $X_i > 0$ são variáveis aleatórias iid com média μ e variância σ^2. Suponha também que $N(t)$ e $(X_i)_{i\geq 1}$ são independentes. Determine $E(S_t)$ e $Var(S_t)$.