SOLUÇÃO DO EXAME DA ÉPOCA NORMAL

19 de Junho 2017

1. Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $\{0,1,2,3,4\}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação e classifique os respectivos estados (recorrente/transiente).

(b) Determine o período do estado 0.

(c) Determine as distribuições estacionárias da cadeia.

(d) Calcule a probabilidade de partindo do estado 2 a cadeia ser absorvida pelo estado 4.

Solução:

(a) $S = \{0,2\} \cup \{1,3\} \cup \{4\}$. Como $\{0,2\}$ é uma classe aberta, os seus estados são transientes. Como $\{1,3\}$ é uma classe fechada, os seus estados são recorrentes positivos. O estado 4 é absorvente, portanto é recorrente positivo.

(b) $Per(0) = 2$ porque $P_{0,0}^{(2n)} \geq (P_{0,0}^{(2)})^n > 0$ e $P_{0,0}^{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$

(c) As medidas estacionárias podem ser calculadas identificando as classes fechadas da cadeia. Como $\{4\}$ é uma classe fechada, logo $\mu = (0,0,0,0,1)$ é uma distribuição estacionária. Por outro lado, $\{1,3\}$ é também fechada e portanto $\nu = (0, \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0)$ é uma distribuição estacionária. Assim as distribuições estacionárias da cadeia são

$$\pi = \lambda\mu + (1-\lambda)\nu \quad \lambda \in [0,1]$$

(d) Seja h_i a probabilidade de absorção em 4 partindo do estado i. Temos que $h_4 = 1$ e $h_1 = h_3 = 0$ porque $\{1,3\}$ é uma classe fechada. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} h_0 = \frac{2}{3}h_1 + \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{6}h_4 \\ h_1 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{2}{3}h_3 \\ h_2 = \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_1 \\ h_3 = h_1 \end{cases}$$

obtemos $h_0 = 2/11$ e $h_2 = 1/11$.

2. Os colaboradores da empresa *iFired* podem assumir a função de programador ou a função de gestor. Em cada ano, 70% dos programadores continuam na mesma função, 20% assumem a função de gestores e 10% são despedidos. No caso dos gestores, em cada ano 95% permanecem na mesma função enquanto que 5% são despedidos.

   (a) Quanto tempo em média um colaborador trabalha na *iFired* até ser despedido.

   (b) Para combater a insatisfação dos colaboradores a *iFired* promove anualmente 5% dos gestores a sócios (não podem ser despedidos), 90% continuam em funções e os restantes 5% são despedidos. Determine a probabilidade de um programador vir a ser despedido.

Solução:

(a) A matriz de transição da cadeia é

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja t_p, t_g, t_d o tempo médio de absorção no estado *despedido* partindo do estado *programador*, *gestor* ou *despedido*, respectivamente. É claro que $t_d = 0$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} t_p = 1 + 0.7t_p + 0.2t_g + 0.1t_d \\ t_g = 1 + 0.95t_g + 0.05t_d \end{cases}$$

obtemos $t_p = 50/3$ e $t_g = 20$. Ou seja, em média um colaborador que entre como programador trabalha 50/3 anos enquanto que um colaborador que entre como gestor trabalha 20 anos.

(b) A matriz de transição da cadeia modificada é

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja h_p, h_g, h_d, h_s a probabilidade de absorção no estado *despedido* partindo do estado *programador*, *gestor*, *despedido* ou *sócio*, respectivamente. É óbvio que $h_s = 0$ e $h_d = 1$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} h_p = 0.7h_p + 0.2h_g + 0.1h_d \\ h_g = 0.9h_g + 0.05h_d + 0.05h_s \end{cases}$$

obtemos $h_p = 2/3$ e $h_g = 1/2$. Portanto, a probabilidade de um programador vir a ser despedido é $2/3$.

3. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com intensidade 1 e W_n o tempo de ocorrência do n-ésimo evento. Calcule:

(a) $\mathbb{P}(N(2) = 4|N(1) = 3)$

(b) $E(N(5)|N(3) = 2)$

(c) $\mathbb{P}(W_1 \leq 2|N(3) = 1)$

Solução:

(a) $\mathbb{P}(N(2) = 4|N(1) = 3) = \mathbb{P}(N(2) - N(1) = 1|N(1) = 3) = \mathbb{P}(N(2) - N(1) = 1) = 1/e$

(b) $E(N(5)|N(3) = 2) = E(N(5) - N(3) + 2|N(3) = 2) = 2 + E(N(5) - N(3)) = 4$

(c) $\mathbb{P}(W_1 \leq 2|N(3) = 1) = \mathbb{P}(N(2) \geq 1|N(3) = 1) = \mathbb{P}(N(2) = 1|N(3) = 1) = 2/3$

4. Um laboratório de computadores tem 2 impressoras e um técnico responsável pela sua manutenção. Suponha que cada impressora trabalha durante um tempo médio μ^{-1} dias até necessitar de manutenção e o técnico demora em média λ^{-1} dias para realizar a respectiva manutenção. Seja $X(t) \in \{0, 1, 2\}$ o número de impressoras a funcionar no instante t.

(a) Supondo que a intensidade de avaria é proporcional ao número de impressoras em funcionamento, use um processo de nascimento e morte para modelar $X(t)$. Determine a matriz de intensidades que caracteriza o processo. Se não respondeu a esta questão use a matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Escreva a equação progressiva de Kolmogorov para $P'_{1,2}(t)$.

(c) Supondo que $\lambda = 2$ e $\mu = 1$ determine:

   i. a distribuição estacionária;

   ii. a fracção de tempo (longo prazo) de funcionamento simultâneo das impressoras;

   iii. o número médio (longo prazo) de impressoras em funcionamento.

Solução:

(a)

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

(b) De $P'(t) = P(t)Q$ obtemos

$$P'_{1,2}(t) = \lambda P_{1,1}(t) - 2\mu P_{1,2}(t)$$

(c) i. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -2\pi_0 + \pi_1 = 0 \\ 2\pi_0 - 3\pi_1 + 2\pi_2 = 0 \\ 2\pi_1 - 2\pi_2 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

obtemos $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$.

   ii. $2/5$

   iii. $0 \times 1/5 + 1 \times 2/5 + 2 \times 2/5 = 6/5$

5. Seja S_t o preço de um activo financeiro no instante t e suponha que

$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^{N(t)} X_i,$$

onde $S_0 > 0$ é o valor inicial, $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa $\lambda > 0$, $X_i > 0$ são variáveis aleatórias iid com média μ e variância σ^2. Suponha também que $N(t)$ e $(X_i)_{i\geq 1}$ são independentes. Determine $E(S_t)$ e $Var(S_t)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
E(S_t) &= E(S_0 \prod_{n=1}^{N(t)} X_i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(S_0 \prod_{n=1}^{N(t)} X_i | N(t) = k)\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E(S_0 \prod_{n=1}^{k} X_i)\mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= S_0 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \mathbb{P}(N(t) = k) \\
&= S_0 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= S_0 e^{-\lambda t(1-\mu)}
\end{aligned}$$

Como $Var(S_t) = E(S_t^2) - E(S_t)^2$ temos que

$$Var(S_t) = S_0^2 e^{-\lambda t(1-\mu^2)} - S_0^2 e^{-2\lambda t(1-\mu)}$$