Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

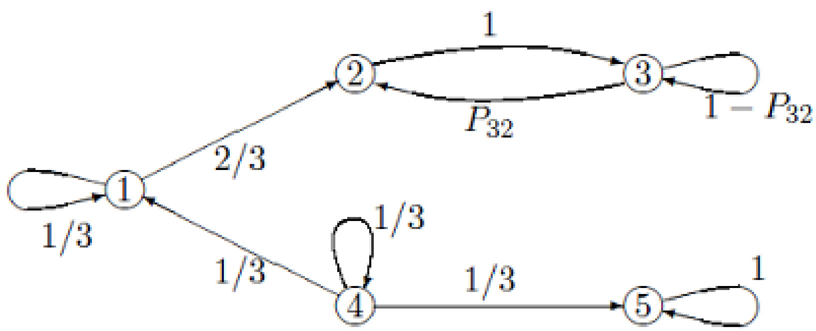
Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

30 de Junho de 2014

Atenção: Justifique todas as respostas

1. Considere uma cadeia de Markov com as seguintes probabilidades de transição num passo, com $0 < P_{32} < 1$.



   (a) Identifique os estados transientes e cada classe de estados recorrentes. (10)

   (b) Determine a distribuição estacionária de cada classe recorrente. (10)

   (c) Supondo que o processo se inicia na no estado 4, qual é a probabilidade de ser absorvido no estado 5? (5)

   (d) Determine as seguintes probabilidades, como função de n : P^n_{44}, P^n_{45} e P^n_{41}. Justifique sucintamente (sem apresentar cálculos). (15)

   (e) Determine $lim_{n\to\infty} P^n_{43}$. (10)

2. Uma agência de rating classifica as empresas de acordo com o seu risco de crédito em AAA, AA, A e D (default), por essa ordem. As probabilidades de transição num ano de um nível para o outro são dadas pela seguinte matriz de Markov (com os estados pela mesma ordem).

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0. & 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

   (a) Represente o grafo relativo às probabilidades de transição num passo e explique, justificando, se a cadeia é (10)

      i. irredutível

      ii. aperiódica

(b) Qual é a probabilidade de que uma empresa com rating AA esteja no estado Default passados 2 anos? (5)

(c) Determine a distribuição limite da cadeia (10)

(d) Considere que uma companhia tem a classificação AAA num determinado ano. Determine o número esperado de anos que essa companhia tem a classificação AA antes de ser declarada em Default? (10)

3. Uma fábrica possui 3 máquinas idênticas. Sempre que uma delas avaria vai para reparação, junto de um de entre 2 técnicos especializados. Cada máquina, quando em funcionamento, funciona durante um período aleatório, exponencialmente distribuído, com média 12 até avariar. O tempo de reparação de cada máquina é exponencial média 10. Designe por $N(t)$ o **número de máquinas avariadas** no instante t. $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ pode ser descrito como um processo de nascimento e morte.

(a) Indique as taxas de nascimento e morte. (15)

(b) Qual o número médio de máquinas avariadas. (15)

(c) Qual a fracção de tempo em que os dois técnicos estão ambos ocupados? (5)

4. O intervalo de tempo entre as chegadas consecutivas a um multibanco tem distribuição exponencial. Entre a meia-noite e as 8 horas da manhã o intervalo médio de tempo entre chegadas é de 10 minutos, enquanto que entre as 8 horas da manhã e a meia noite o valor correspondente é de 2 minutos. Cada transacção tem média 30€ e desvio padrão 50€. As chegadas dão-se de modo independente. Uma transacção negativa, corresponde a um depósito.

(a) Qual é a distribuição do número de transacções efectuadas no referido multibanco num dia? (10)

(b) Determine a média e desvio padrão do total transacionado num dia. (10)

(c) Calcule uma aproximação para a probabilidade de que o total diário transaccionado seja superior a dezoito mil euros. (10)

5. Seja $\{B_t\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano standard. Quais dos seguintes processos são movimentos Brownianos? Justifique.

(a) $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ (10)

(b) $\{cB_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ (10)

(c) $\{B_{2t} - B_t\}_{t\geq 0.}$ (10)

6. Considere que $\{\xi_n; n = 1, 2, ...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., cuja função geradora de momentos, $M_\xi(\theta)$ existe para todo o $\theta \in (-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ e que $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Para $\theta \in (-\delta, \delta)$, seja $\psi(\theta) = \ln M_\xi(\theta)$ e $X_n = e^{\theta S_n - n\psi(\theta)}$. Mostre que $\{X_n; n = 1, 2, ...\}$ é uma martingala relativamente a $\{\xi_n; n = 1, 2, ...\}$. (20)