Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

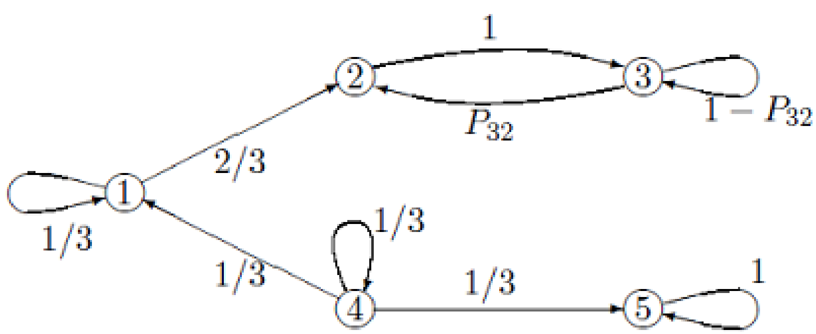
Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

30 de Junho de 2014

Atenção: Justifique todas as respostas

1. -



(a) Os estados 1 e 4 são transientes. Os estados 2 e 3 constituem uma classe de estados recorrentes. O estado 5 constitui outra classe, com apenas um estado, recorrente.

(b) A distribuição estacionária associada à classe $\{2,3\}$ é $\pi_2^{(1)} = P_{32}/(1+P_{32})$ e $\pi_3^{(1)} = 1/(1+P_{32})$. Para a distribuição estacionária associada à classe $\{5\}$ tem-se obviamente $\pi_5^{(2)} = 1$.

(c) 1/2.

(d) $P_{44}^n = 3^{-n}$, $P_{45}^n = \frac{1}{2}(1-3^{-n})$ e $P_{41}^n = n3^{-n}$.

(e) $lim_{n\to\infty} P_{43}^n = \frac{1}{2(1+P_{32})}$.

2. -

(a) i. Designem-se os estados por 1,2,3 e 4 de acordo com a sua classificação (de AAA para D).A cadeia é irredutível pois todos os estados comunicam entre si.

ii. A cadeia é aperiódica. Como a cadeia é irredutível, todos os estados têm o mesmo período e como há elementos positivos na diagonal principal de P, o período dos estados é 1.

(b) É 0.01.

(c) Como a cadeia é irredutível e aperiódica existe uma única distribuição estacionária e é a distribuição limite. É a única solução de

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.8\pi_1 + 0.1\pi_2 \\ \pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.8\pi_2 + 0.1\pi_3 \\ \pi_4 = 0.1\pi_3 + 0.8\pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

que é $[1/6, 2/6, 2/6, 1/6]$.

(d) Seja $w_i =$ Número esperado de visitas ao estado 2, antes de visitar o estado 4, se a empresa tiver a classificação i, $i = 1, 2, 3$. Utilizando a análise baseada no primeiro passo tem-se

$$\begin{cases} w_1 = 0.8w_1 + 0.2w_2 \\ w_2 = 1 + 0.1w_1 + 0.8w_2 + 0.1w_3 \\ w_3 = 0.1w_2 + 0.8w_1 \end{cases}$$

de onde $w_1 = 20$.

3. Uma fábrica possui 3 máquinas idênticas. Sempre que uma delas avaria vai para reparação, junto de um de entre 2 técnicos especializados. Cada máquina, quando em funcionamento, funciona durante um período aleatório, exponencialmente distribuído, com média 12 até avariar. O tempo de reparação de cada máquina é exponencial média 10. Designe por $N(t)$ o **número de máquinas avariadas** no instante t. $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ pode ser descrito como um processo de nascimento e morte.

(a) $\lambda_n = (3-n)/12$, $n = 0, 1, 2$.
$\mu_n = \frac{\min\{2,n\}}{10}$, $n = 1, 2, 3$

(b) $\pi_0 = \frac{144}{929}$, $\pi_1 = \frac{360}{929}$, $\pi_2 = \frac{300}{929}$ e $\pi_3 = \frac{125}{929}$.Então o número médio de máquinas avariadas é 1.437 .

(c) $\pi_2 + \pi_3 = 0.45748$.

4. -

(a) É uma Poisson com média $\lambda = 8 \times 6 + 16 \times 30 = 528$

(b) $E[S] = 528 \times 30 = 15\,840$ e $V[S] = 528 \times (50^2 + 30^2) = 1795\,200$ de onde $\sigma_S = \sqrt{1795\,200}$

(c) $\Pr\{S > 18000\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{18000 - 15\,840}{\sqrt{1795\,200}}\right) = 1 - \Phi(1.61) = 1 - 0.9463 = 0.053\,7$.

5. -

(a) $\{-B_t\}_{t\geq 0}$ - Sim, a demonstração é trivial

(b) $\{cB_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ - Sim: Seja $X_t = cB_{t/c^2}$. Tem-se que $X_0 = 0$. O incremento $X_{t+s} - X_s = c(B_{t/c^2+s/c^2} - B_{s/c^2})$ tem distribuição normal, com $E(X_{t+s} - X_s) = 0$ e $V(X_{t+s} - X_s) = c^2 V(B_{t/c^2+s/c^2} - B_{s/c^2}) = c^2 \times \frac{t}{c^2} = t$. O incremento $X_{t+s} - X_s$ é independente do incremento X_s, $\forall s, t > 0$ devido ao facto de o incremento $B_{t+s} - B_s$ ser independente do incremento B_s, $\forall s, t > 0$. X_t é contínua pois B_t também o é.

(c) $\{B_{2t} - B_t\}_{t\geq 0}$ - Não é um movimento Browniano. Seja $X_t = B_{2t} - B_t$. Por exemplo o incremento $X_{2t} - X_t = (B_{4t} - B_{2t}) - (B_{2t} - B_t)$ não é independemte do incremento $X_t = B_{2t} - B_t$, pois $Cov((B_{4t} - B_{2t}) - (B_{2t} - B_t), B_{2t} - B_t) = -V(B_{2t} - B_t) = -t$.

6. $E[|X_n|] = E[X_n] = E[e^{\theta S_n - n\psi(\theta)}] = E[e^{\theta S_n}]e^{-n\psi(\theta)} = (M_\xi(\theta))^n (M_\xi(\theta))^{-n} = 1$
$E[X_{n+1}|\xi_1, ..., \xi_n] = E[e^{\theta S_{n+1} - (n+1)\psi(\theta)}|\xi_1, ..., \xi_n] = E[e^{\theta S_n + \theta\xi_{n+1} - (n+1)\psi(\theta)}|\xi_1, ..., \xi_n] =$
$= e^{\theta S_n - n\psi(\theta)} E[e^{\theta\xi_{n+1} - \psi(\theta)}|\xi_1, ..., \xi_n] = X_n E[e^{\theta\xi_{n+1} - \psi(\theta)}] = X_n M_\xi(\theta)(M_\xi(\theta))^{-1} = X_n$.