Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

16 de Junho de 2014

Atenção: Justifique todas as respostas

1. Considere uma cadeia de Markov com espaço dos estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de probabilidades de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

   (a) Qual a partição de S induzida pela relação de comunicação entre estados? [10]

   (b) Quais são os estados recorrentes e transientes? [10]

   (c) Qual o período de cada estado? [10]

2. Uma empresa possui três máquinas idênticas, para a fabrico de um determinado produto. Em cada dia, cada máquina avaria com probabilidade 1/2 independentemente das outras máquinas. No fim do dia cada máquina avariada é enviada para uma oficina para reparação, que apenas repara um máquina de cada vez. Quando tem uma ou mais de uma máquina em reparação, repara exactamente uma, que envia para a empresa ao fim do dia de trabalho. Seja X_n o número de máquinas em funcionamento no fim do dia n (depois do envio das máquinas avariadas e recolhas das reparadas).

   (a) Descreva $\{X_n\}$ como uma cadeia de Markov, indicando os seus estados e a matriz de probabilidades de transição. [20]

   (b) Classifique os estados e determine a distribuição estacionária, no caso de existir. [20]

   (c) Qual o número médio de máquinas a funcionar no início de um dia típico de trabalho? [10]

3. Suponha que a passagem dos autocarros de uma determinada carreira, numa paragem aonde só passam autocarros da referida carreira, ocorre segundo um processo de Poisson com taxa α, enquanto que a chegada dos passageiros para esse autocarro ocorre segundo um processo de Poisson de taxa β independentemente da passagem dos autocarros.

   (a) Em $t = 0$ passa um autocarro que deixa a paragem vazia. Qual a probabilidade de que a primeira chegada depois de $t = 0$ seja de um autocarro? [20]

   (b) Qual a probabilidade de que o primeiro autocarro a passar depois de $t = 0$ encontre r passageiros à espera? Identifique a distribuição de probabilidade em causa. [20]

4. Considere um processo de nascimento e morte com espaço de estados M, $M+1, ..., N$ com

$$\lambda_n = \alpha n(N-n) \text{ e } \mu_n = \beta n(n-M),$$

   aonde M e N representam o limite inferir e superior da população.

   (a) Prove que a distribuição limite da população é proporcional a

$$\frac{1}{j}\binom{N-M}{j-M}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}, \ j = M, M+1, ..., N.$$

   [20]

   (b) Suponha que $M = 2$, $N = 5$, $\alpha = 2.$ e $\beta = 1$. Calcule a distribuição limite. [20]

5. Considere o seguinte processo autoregressivo

$$Y_n = aY_{n-1} + Z_n,$$

   onde $\{Z_n; n = 1, 2, ...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média nula e variância σ_Z^2 e suponha que $Y_0 = 0$. Prove que $\{M_n; n = 1, 2, ...\}$, com $M_n = a^{-n}Y_n$ é uma martingala relativamente a $\{Z_n; n = 1, 2, ...\}$. [20]

6. Suponha que $\{W_t\}_{t\geq 0}$ e $\left\{\widetilde{W}_t\right\}_{t\geq 0}$ são movimentos Brownianos standard e que $\rho \in [-1, 1]$ é uma constante. O processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ com $X_t = \rho W_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\widetilde{W}_t$ é um movimento Browniano? Justifique. [20]