Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

16 de Junho de 2014

Tópicos de solução

1. -

   (a) $\{\{0,1\},\{2,4\},\{3,5\}\}$

   (b) Estados recorrentes: 0,1,2,4; estados transientes: 3 e 5.

   (c) $d(i) = 1$, $i = 0, ..., 5\}$

2. -

   (a) $S = \{0,1,2,3\}$ e

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

   (b) Os estados são recorrentes positivos e a cadeia é irredutível e aperiódica. $\boldsymbol{\pi} = \left[\frac{1}{59}, \frac{22}{59}, \frac{28}{59}, \frac{8}{59}\right]$.

   (c) $\sum_{k=0}^{3} k\pi_k = \frac{102}{59}$.

3. -

   (a) Designando por W o tempo decorrido até à passagem do primeiro autocarro e por Z o tempo decorrido até à chegada do primeiro passageiro, tem-se que W e Z são exponenciais, independentes com média $1/\alpha$ e $1/\beta$ respectivamente. Pretende-se calcular

$$P\{Z > W\} = \int_0^{\infty} \Pr\{Z > W | W = w\} f_W(w) dw =$$

$$\int_0^{\infty} \Pr\{Z > w\} f_W(w) dw = \int_0^{\infty} e^{-\beta w} \alpha e^{-\alpha w} dw = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

   (b) Designe-se por $X(t)$ o processo relativo à chegada dos passageiros. Pretende-se calcular:

$$\begin{aligned} \Pr\{X(W) &= r\} = \int_0^{\infty} \Pr\{X(t) = r | W = t\} f_W(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta t} (\beta t)^r}{r!} \alpha e^{-\alpha t} dt = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^r, \end{aligned}$$

   que corresponde à distribuição geométrica. A resposta poderia ser dada imediatamente tendo em conta o resultado encontrado em a).

4. -

   (a)

$$\begin{aligned}
\theta_j &= \frac{\lambda_M ... \lambda_{j-1}}{\mu_{M+1} ... \mu_j} = \frac{\lambda_M}{\mu_j}\Pi_{n=M+1}^{j-1}\frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{\alpha M(N-M)}{\beta j(j-M)}\Pi_{n=M+1}^{j-1}\frac{\alpha n(N-n)}{\beta n(n-M)} = \\
&= \frac{M(N-M)}{j(j-M)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}\Pi_{n=M+1}^{j-1}\frac{(N-n)}{(n-M)} = \frac{M(N-M)}{j(j-M)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}\frac{\frac{(N-(M+1))!}{(N-j)!}}{(j-(M+1))!} = \\
&= \frac{M}{j}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}\frac{\frac{(N-M)!}{(N-j)!}}{(j-M)!} = \frac{M}{j}\binom{N-M}{j-M}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}, \ j = M, M+1, ..., N,
\end{aligned}$$

   que é proporcional a $\beta_j = \frac{1}{j}\binom{N-M}{j-M}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{j-M}$, pois M é constante

   (b) $\beta_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 3$ e $\beta_5 = \frac{8}{5}$ e como $\pi_j = K\beta_j$ e$\sum \pi_j = 1$ temm-se que $\pi_2 = \frac{5}{71}$, $\pi_3 = \frac{20}{71}$, $\pi_4 = \frac{16}{71}$ e $\pi_5 = \frac{30}{71}$.

5. -

   $E[|M_n|] = |a^{-n}|E[Y_n] = |a^{-n}|E[|a^{n-1}Z_1 + ... aZ_{n-1} + Z_n|] \leq |a^{-n}| \sum_{i=1}^{n} |a^{i-1}| E\left[|Z_i|\right] < +\infty$ porque $E\left[|Z_i|\right]$, bem como $|a^i|$ são finitos para qualquer i.

   $E[M_{n+1}|Z_1, Z_2, ..., Z_n] = E[a^{-(n+1)}(aY_n + Z_{n+1})|Z_1, Z_2, ..., Z_n] = a^{-n}Y_n + E[a^{-(n+1)}Z_{n+1}|Z_1, Z_2, ..., Z_n] = M_n + a^{-(n+1)}E[Z_{n+1}] = M_n$.

6. W_s é independente de $(W_{s+t} - W_s)$, bem como $\widetilde{W}_s$ é independente de $(\widetilde{W}_{s+t} - \widetilde{W}_s)$, $\forall s, t > 0$. Então $X_s = \rho W_s + \sqrt{1-\rho^2}\,\widetilde{W}_s$ também é independente de $(X_{s+t} - X_s) = \rho(W_{s+t} - W_s) + \sqrt{1-\rho^2}\,(\widetilde{W}_{s+t} - \widetilde{W}_s)$. Assim os incrementos são independentes.

   Por outro lado o incremento $(X_{s+t} - X_s) = \rho(W_{s+t} - W_s) + \sqrt{1-\rho^2}\,(\widetilde{W}_{s+t} - \widetilde{W}_s)$ tem distribuição normal (é combinação linear de normais) com média 0 e variância t.

   Como a soma de funções contínuas é contínua, estão verificados os três postulados para que X_t seja movimento Browniano standard.