

Processos Estocásticos e Aplicações

TESTE INTERCALAR

1h15m

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

- (1) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ no espaço de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período. (2 valores)
- (b) Determine as distribuições estacionárias da cadeia. (1 valor)
- (c) Calcule a probabilidade de partindo do estado 0 a cadeia ser absorvida pelo estado 1. (1 valor)
- (2) Uma empresa de seguros classifica os seus clientes em três categorias: *normal*, *select* e *premium*. No período de um ano os clientes podem mudar de categoria. 40% dos clientes normais mudam para select, 30% dos clientes select mudam para premium, enquanto que 10% dos select mudam para normal e 20% dos premium mudam para select. No entanto, não é possível mudar directamente a categoria de um cliente normal para premium nem de premium para normal.
- (a) Seja X_n a variável aleatória que representa a categoria de um cliente no ano n . Modele X_n usando uma cadeia de Markov e determine a matriz de transição. (1 valor)
- (b) Quantos anos (em média) são necessários para um cliente normal mudar a sua categoria para premium. (2 valores)
- (c) Determine a fracção limite dos clientes em cada categoria. (1 valor)
- (3) Pessoas chegam a uma repartição das finanças seguindo um processo de Poisson com intensidade de 1 pessoa a cada 30 minutos. O funcionário público responsável começa por atender a primeira pessoa só após a terceira pessoa chegar à repartição.
- (a) Após 1 hora da abertura da repartição apenas uma pessoa encontrava-se em espera. Calcule a probabilidade do atendimento iniciar antes da 3ª hora. (1 valor)
- (b) Após 2 horas da abertura da repartição chegaram 2 pessoas. Calcule a probabilidade da primeira pessoa ter chegado antes da primeira 1/2 hora da abertura da repartição. (1 valor)