Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2017/2018

Processos Estocásticos e Aplicações

SOLUÇÃO DO TESTE INTERCALAR

(1) (a) $C(0) = \{0, 2\}$ é aberto. As classes $C(1) = \{1\}$ e $C(3) = \{3, 4\}$ são fechadas. Logo,

$$S = \{0, 2\} \cup \{1\} \cup \{3, 4\}$$

onde $\{0, 2\}$ são estados transientes e os restantes recorrentes positivos. Todos os estados são aperiódicos.

(b) Em $\{1\}$ tem distribuição $\mu = (0, 1, 0, 0, 0)$ e $\{3, 4\}$ tem distribuição $\nu = (0, 0, 0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$. Logo as distribuições estacionárias da cadeia são

$$\pi = \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu, \quad \lambda \in [0, 1].$$

(c) Temos o sistema

$$\begin{cases} h_0 = \frac{2}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_2 \\ h_1 = 1 \\ h_2 = \frac{1}{6}h_0 + \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{3}h_3 \\ h_3 = 0 \\ h_4 = 0 \end{cases}$$

que tem solução $h_0 = \frac{6}{7}$ e $h_2 = \frac{4}{7}$. A resposta à questão é $\frac{6}{7}$.

(2) (a)

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

(b) Sistema dos tempos médios de absorção

$$\begin{cases} t_N = 1 + 0.6t_N + 0.4t_S \\ t_S = 1 + 0.1t_N + 0.6t_S + 0.3t_P \\ t_P = 0 \end{cases}$$

tem solução $t_N = \frac{20}{3}$ e $t_S = \frac{25}{6}$. A resposta à questão é $\frac{20}{3}$.

(c) A cadeia é irredutível e aperiódica. Assim, pelo teorema ergódico, a distribuição limite é igual à distribuição estacionária. Para calcular a distribuição estacionária resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \pi_N = 0.6\pi_N + 0.1\pi_S \\ \pi_S = 0.4\pi_N + 0.6\pi_S + 0.2\pi_P \\ \pi_P = 0.3\pi_S + 0.8\pi_P \end{cases}$$

que tem solução $\pi = (\frac{1}{11}, \frac{4}{11}, \frac{6}{11})$.

(3) $N(t)$ representa o número de pessoas que chegaram à repartição das finanças até ao instante t, medido em horas. A intensidade do processo é $\lambda = 2$ pessoas por hora.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_3 \leq 3|N(1)=1) &= \mathbb{P}(N(3) \geq 3|N(1)=1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(N(3)=1|N(1)=1) - \mathbb{P}(N(3)=2|N(1)=1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(N(3)-N(1)=0) - \mathbb{P}(N(3)-N(1)=1) \\
&= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} \\
&= 1 - 5e^{-4}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_1 \leq 1/2|N(2)=2) &= \mathbb{P}(N(1/2) \geq 1|N(2)=2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(N(1/2)=0|N(2)=2) \\
&= 1 - C_0^2(\frac{1}{4})^0(1-\frac{1}{4})^2 \\
&= \frac{7}{16}
\end{aligned}$$