Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2018/2019

Processos Estocásticos e Aplicações

TESTE INTERCALAR

1h15m

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

(1) Considere uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ no espaço de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determine a decomposição do espaço de estados em classes de comunicação, classifique os respectivos estados (recorrente/transiente) e determine o seu período. (1.5 valores)

(b) Determine as distribuições estacionárias da cadeia. (1.5 valores)

(c) Calcule os tempos médios de reentrada $m_i = E(T_i | X_0 = i)$ onde $T_i = \min\{n \geq 1 \colon X_0 = i\}$ e $i \in S$. (1 valor)

(2) Uma empresa possui duas máquinas idênticas para o fabrico de um determinado produto. Em cada dia, cada máquina avaria com probabilidade $1/2$ independentemente da outra máquina (duas máquinas podem avariar no mesmo dia). No final do dia cada máquina avariada é enviada para uma oficína para reparação, que apenas repara uma máquina de cada vez. Quando a oficina tem uma ou duas máquinas em reparação, repara exactamente uma, que envia para a empresa ao final do dia de trabalho. Seja X_n o número de máquinas em funcionamento no final do dia n (depois do envio das máquinas avariadas e recolha da reparada, se existir).

(a) Descreva $(X_n)_{n\geq 0}$ usando uma cadeia de Markov e determine a respectiva matriz de transição. (1 valor)

(b) Suponha que no final de um certo dia as duas máquinas estão em funcionamento. Quantos dias seguidos (em média) temos pelo menos uma máquina a funcionar no final do dia de trabalho? (1.5 valores)

(c) Determine o número médio, a longo prazo, de máquinas em funcionamento no final de um dia de trabalho. (1.5 valores)

(3) Seja $\{N(t)\}$ um processo de Poisson com intensidade $\lambda > 0$. Determine,

(a) $\mathbb{P}(W_3 < 2 | N(1) = 1)$. (1 valor)

(b) $E\left(e^{\mu N(t)} | N(s) = k\right)$ onde $k \in \mathbb{N}$, $t > s \geq 0$ e $\mu > 0$. (1 valor)