Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão

2º Semestre 2018/2019

Processos Estocásticos e Aplicações

SOLUÇÃO DO TESTE INTERCALAR

(1) (a) $S = \{0, 2\} \cup \{1, 3, 4\}$ onde $C(0) = \{0, 2\}$ é recorrente positiva e aperiódica e $C(1) = \{1, 3, 4\}$ é aberta (estados transientes) com período 3.

(b) $\pi = (2/5, 0, 3/5, 0, 0)$

(c) Como todos os estados recorrentes comunicam temos que $m_0 = 1/\pi_0 = 5/2$ e $m_2 = 1/\pi_2 = 5/3$. $m_1 = m_3 = m_4 = \infty$ porque os estados 1, 3 e 4 são transientes.

(2) (a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

(b) Sistema dos tempos médios de absorção para o conjunto $A = \{0\}$ é

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 + 1/2t_1 + 1/2t_2 \\ t_2 = 1 + 1/4t_0 + 1/2t_1 + 1/4t_2 \end{cases}$$

e tem solução $t_2 = 8$ e $t_1 = 10$. A resposta à questão é 8 dias.

(c) A cadeia é irredutível e aperiódica. Assim, pelo teorema ergódico, a distribuição limite é igual à distribuição estacionária. Para calcular a distribuição estacionária resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \pi_0 = 1/4\pi_2 \\ \pi_1 = \pi_0 + 1/2\pi_1 + 1/2\pi_2 \\ \pi_2 = 1/2\pi_1 + 1/4\pi_2 \end{cases}$$

que tem solução $\pi = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, \frac{4}{11})$. Logo, o número médio de máquinas em funcionamento (a longo prazo) é $1 \times \frac{6}{11} + 2 \times \frac{4}{11} = \frac{14}{11}$.

(3) (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_3 < 2 | N(1) = 1) &= \mathbb{P}(N(2) \geq 3 | N(1) = 1) \\ &= \mathbb{P}(N(2) - N(1) \geq 2 | N(1) = 1) \\ &= \mathbb{P}(N(2) - N(1) \geq 2) \\ &= \mathbb{P}(N(1) \geq 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(N(1) = 0) - \mathbb{P}(N(1) = 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
E(e^{\mu N(t)}|N(s)=k) &= e^{\mu k}E\big(e^{\mu(N(t)-N(s))}|N(s)=k\big)\\
&= e^{\mu k}E\big(e^{\mu(N(t)-N(s))}\big)\\
&= e^{\mu k}E\big(e^{\mu(N(t-s))}\big)\\
&= e^{\mu k}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\mu n}\mathbb{P}(N(t-s)=n)\\
&= e^{\mu k}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\mu n}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}\\
&= e^{\mu k-\lambda(t-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{\mu}\lambda(t-s))^n}{n!}\\
&= e^{\mu k-\lambda(t-s)+\lambda(t-s)e^{\mu}}\\
&= e^{\mu k+\lambda(t-s)(e^{\mu}-1)}
\end{aligned}
$$