

Exercícios

Progressões e Séries Geométricas

Exercício 1. Calcule

$$(a) \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots$$

$$(b) 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots$$

$$(c) -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots$$

$$(d) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$$

Exercício 2. Estude a convergência de cada uma das seguintes séries geométricas e calcule, quando possível, a respetiva soma.

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}} \quad (b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^{n+1}}{5^{n-1}} \quad (c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \times 6^{n+1}}{9^{n-2}} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cos(n\pi) 5^{-n+1}$$

$$(e) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7 \times 5^n}{3^{2n+2}} \quad (f) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2 \times 5^{2n-1}}{3^{4n}} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e\pi)^{n-2}}{3^{2n-1}}$$

Exercício 3. Exprima os seguintes números racionais como soma de uma série geométrica convergente e escreva-os na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

$$(a) 0,77777\dots$$

$$(b) 0,52525252\dots$$

$$(c) 0,123123123\dots$$

$$(d) 0,811111\dots$$

Exercício 4. Recorrendo à soma de uma série geométrica convergente, escreva os seguintes números reais na forma a^b com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Q}$.

$$(a) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}}$$

$$(b) \sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7\sqrt[5]{7}\dots}}}$$

Exercício 5. Um empresa vai iniciar a exploração de uma reserva de um mineral utilizado no fabrico de baterias para a indústria automóvel. A reserva, de onde serão extraídas 500 mil toneladas no primeiro ano de exploração, contém 10 milhões de toneladas do mineral. Supondo que a taxa de extração do mineral terá uma redução anual de 10%, mostre que a reserva do mineral não se esgotará.

Exercício 6. Um certo recurso não renovável vai ser explorado por uma companhia mineira. Qual deve ser a reserva mínima deste recurso por forma a que se possa extrair no primeiro ano 6 mil toneladas e reduzir a mineração em 20% em cada ano subsequente sem nunca esgotar o minério.