Exercícios de Cálculo Diferencial

Função inversa

Exercício 1. De uma função bijetiva f sabe-se que $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f'(3) = 7$ e $f'(1) = 9$. Calcule $(f^{-1})'(3)$.

Exercício 2. Calcule a equação da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto indicado, nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^3 + 3$, ponto $(4, 1)$;

(b) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 1$, ponto $(1, 0)$;

(c) $f(x) = 5x^2 e^{2x-4}$, ponto $(20, 2)$.

Exercício 3.
Considere a função «seno hiperbólico» definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$f(x) := \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Justifique que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção e obtenha uma expressão para a respetiva função inversa «argsinh.»

(b) Obtenha uma expressão para $\operatorname{argsinh}'$ e calcule $\operatorname{argsinh}'(0)$.

(c) Calcule de novo $\operatorname{argsinh}'(0)$ utilizando desta vez o Teorema da função inversa.

Exercício 4. Considere a função $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \dfrac{x+2}{x-3}$.

(a) Mostre que f é invertível e que para todo o $x \neq 1$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$.

(b) Utilizando a alínea anterior mostre que para todo o $x \neq 1$, $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{5}{(x-1)^2}$.

(c) Obtenha novamente a expressão de $(f^{-1})'(x)$ utilizando desta vez o teorema de derivação da função inversa.

Polinómios de Taylor e Aplicações

Exercício 5. Considere as funções definidas pelas expressões

$f(x) = e^x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $h(x) = \ln(x)$, e $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Calcule os polinómios de Taylor de ordens $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ de:

(i) f, centrados no ponto $a = 0$;

(ii) g, centrados no ponto $a = 1$;

(iii) h, centrados no ponto $a = 1$;

(iv) i, centrados no ponto $a = 16$.

(b) Trace (com uma calculadora ou um computador) o gráfico de cada uma destas funções e dos gráficos dos respetivos polinómios de Taylor de ordens 1 e 2.

(c) Utilize os polinómios de segunda ordem obtidos na primeira alínea para obter aproximações de

$$\ln(1,1); \qquad \sqrt[10]{e}; \qquad \frac{1}{\sqrt{0,8}}; \qquad \sqrt{17}.$$

Verifique com uma calculadora a qualidade destas aproximações.

Nota: Na verdade, a simples utilização do polinómio de Taylor para efetuar uma estimativa pontual não é suficiente para aferir a precisão da mesma. Em contra-partida, a utilização da fórmula de Taylor, objeto dos próximos exercícios, permite majorar o erro efetuado neste tipo de aproximações.

Exercício 6. Considere a função i definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Obtenha uma aproximação de $\sqrt{17}$ com a ajuda do polinómio de Taylor de ordem 1 (a aproximação linear) centrado em $a = 16$ da função i.

(b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 centrada em $a = 16$ para a função i.

(c) Mostre que o erro cometido com a aproximação linear obtida para $\sqrt{17}$ na alínea (a) não excede $\dfrac{1}{512}$.

Exercício 7. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.

(a) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 0$ para a função f.

(b) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 1$ para a função h.

(c) Utilizando as alíneas anteriores, majore o erro cometido no Exercício 5 nas aproximações de segunda ordem de $\sqrt[10]{e}$ e de $\ln(1,1)$.

Exercício 8. Determine o polinómio de MacLaurin de ordem n das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) e^{3x} (b) $\ln(1 + 2x)$ (c) $\sinh(2x)$ (d) $\sqrt{x+1}$

Exercício 9. Determine os pontos críticos das seguintes funções e, para cada um deles, averigue se se trata de um minimizante local, de um maximizante local ou de um ponto de sela.

(a) $4x^3 - 8x - 12$

(b) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

(c) $x(x-3)^2 + 4$

(d) $x + \dfrac{1}{x}$

(e) $x^3 - \dfrac{2}{x}$

(f) $\dfrac{x}{e^x}$

(g) $\dfrac{x}{3^x}$

(h) $\dfrac{x}{1-x^2}$

(i) xe^x

(j) $x\ln(x)$

(k) $e^x(x^2-1)^3$

(l) $e^{2x-1}(x^2-3)^2$

Exercício 10. Estude as concavidades e localize os pontos de inflexão das funções definidas pelas expressões

(a) $5x - x^2$

(b) $x^2 - 4x + 2$

(c) $3x - x^5$

(d) $(x^2-9)^3$

(e) $\dfrac{x}{x^2+4}$

(g) xe^x

(h) e^{-3x^2}

(i) $\ln(1-x^2)$

(k) $x\arctan(x)$

(l) $|2x^2 + 9x - 5|$

Exercício 11. Calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(ex) - 1}{\sin(3x - 3)}$

(c) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{5y}{\tan(2y)}$

(d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln(2x - 5)}{x^2 - 9}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \ a, b \in \mathbb{R}$

(f) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\arctan(t)}$

(g) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1 - \cos(\alpha y)}{1 - \cos(\beta y)}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(h) $\lim\limits_{r \to 1} \dfrac{\sqrt[5]{r} - 1}{\sqrt[3]{r} - 1}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos(2x)}{\sin(5x)}$

(j) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

(k) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln(x)} \right)$

(l) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{xe^{3x}} \right)$

(m) $\lim\limits_{y \to +\infty} y(2 \arctan(3y) - \pi)$

(n) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sqrt{4x}}$

(o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \sin\left(\dfrac{2}{x}\right) \right)^{\frac{x}{4}}$

(p) $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{\sin(t)}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}}$