Cálculo Diferencial

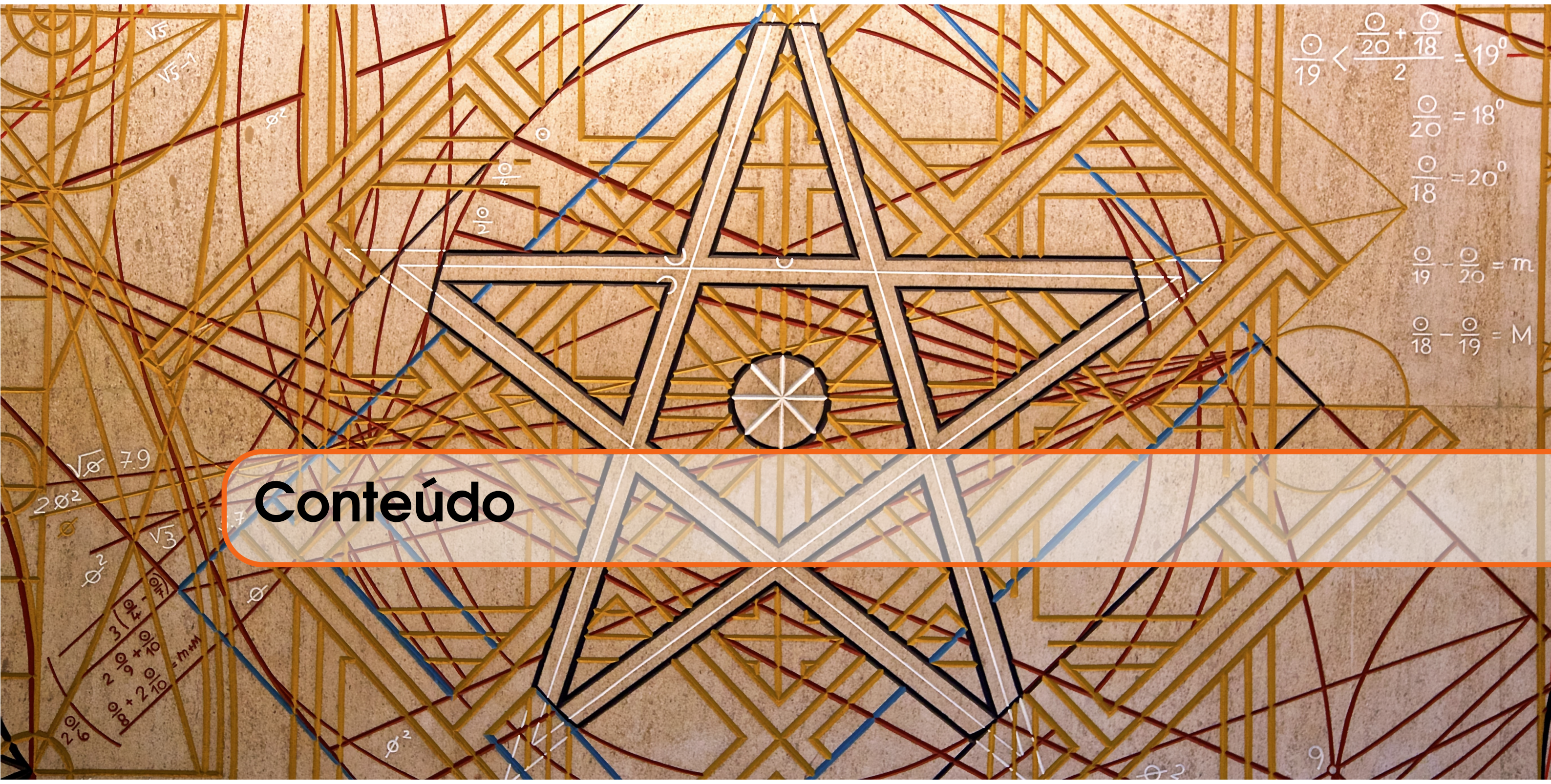
com Aplicações à Economia e à Gestão

Filipe Oliveira - Filipa Carvalho

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

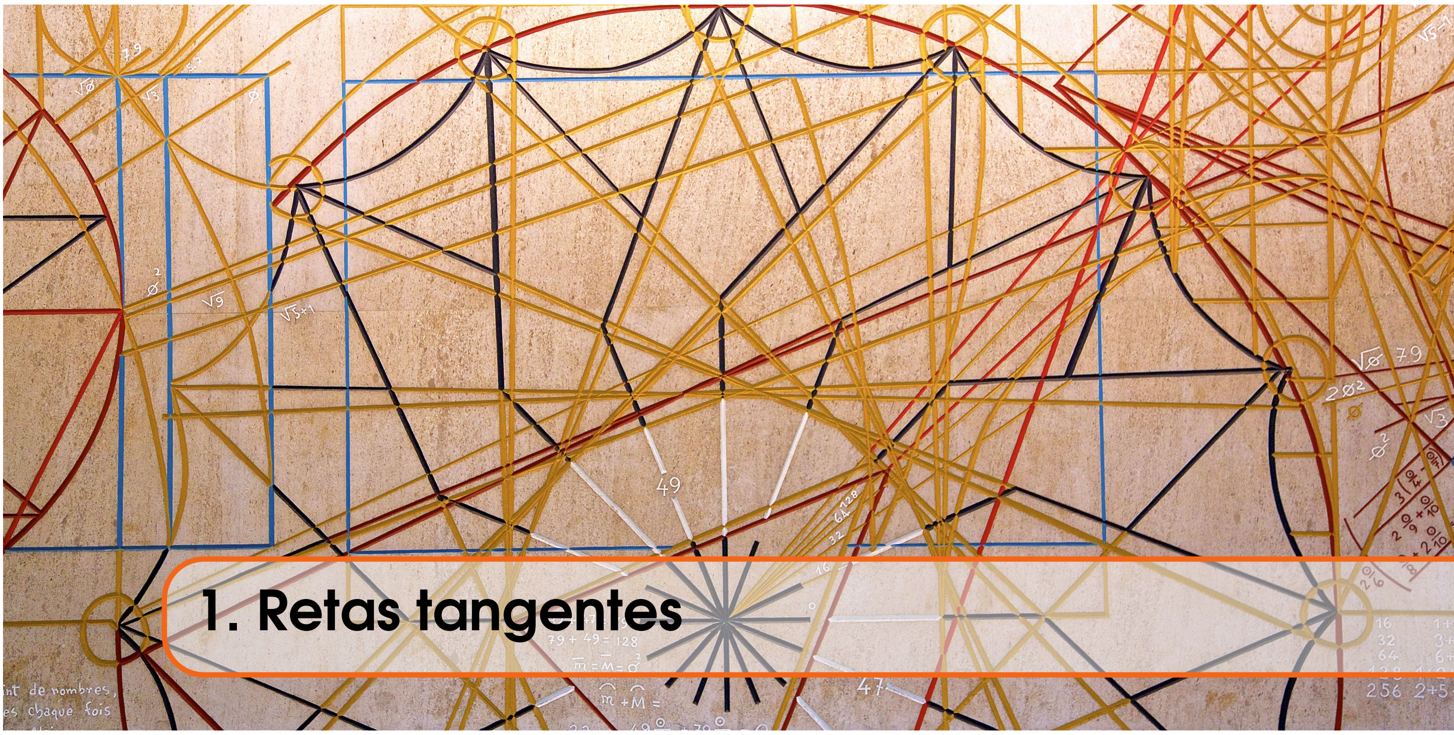
First printing, March 2013



Conteúdo

I Cálculo Diferencial

Cálculo Diferencial



1. Retas tangentes

1.1 Algumas ideias iniciais

Alguns gráficos de funções reais de variável real tendem a assemelhar-se localmente a uma reta. Tomemos o exemplo da função f definida no intervalo $[-1;1]$ por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, cujo gráfico é uma semi-circunferência $\mathscr{C}$ centrada na origem e de raio $r = 1$. Na figura 1.1 representámos $\mathscr{C}$ bem como o ponto $A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathscr{C}$. Na figura 1.2 encontram-se representados os pontos de $\mathscr{C}$ com abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{49}{100};\frac{51}{100}\right[$.

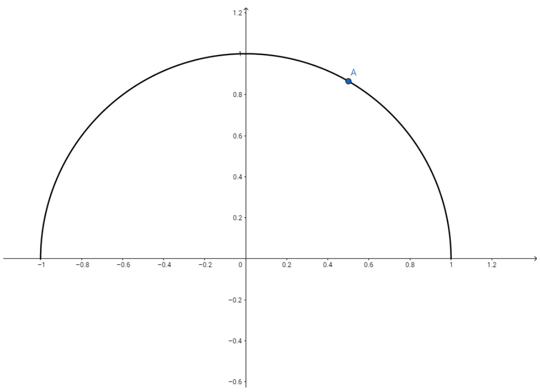


Figura 1.1: $y = \sqrt{1-x^2}$

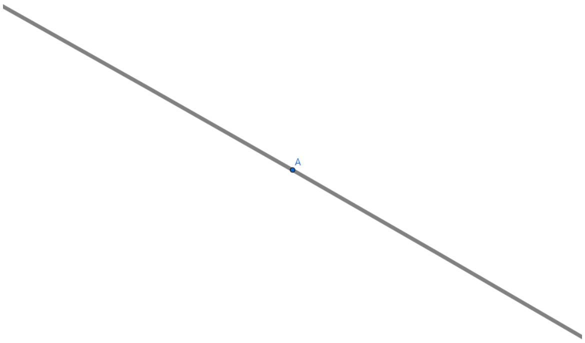


Figura 1.2: $y = \sqrt{1-x^2}$, $\frac{49}{100} < x < \frac{51}{100}$

Se vivéssemos em $\mathscr{C}$ e não nos afastássemos muito do ponto A facilmente seríamos levados a pensar que o nosso mundo era uma reta! Um equívoco análogo foi bem real: apesar dos sábios do primeiro período da Escola de Alexandria (século III A.C.) terem já determinado que a Terra teria uma forma esférica, a ideia de uma Terra plana predominou durante milénios nos meios menos cultos, uma vez que também uma superfície esférica se assemelha localmente a um plano.

Note-se que nem todos os gráficos possuem esta característica de se confundirem localmente com retas. Se tomarmos o gráfico da função valor absoluto, dificilmente conseguiremos ver uma qualquer vizinhança do ponto $A(0;0)$ como uma reta...

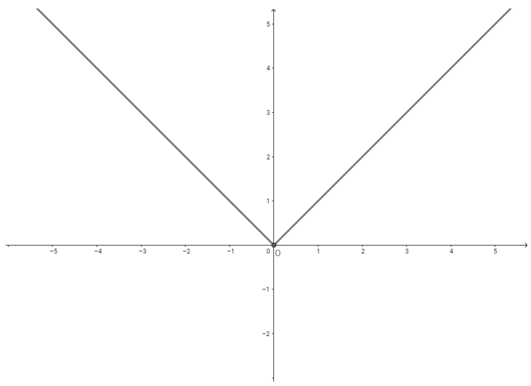


Figura 1.3: $y = |x|$, $-5 < x < 5$

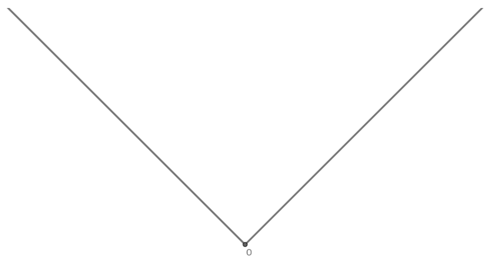


Figura 1.4: $y = |x|$, $-\frac{1}{100} < x < \frac{1}{100}$

Regressemos ao exemplo inicial e representemos, numa mesma figura, a semi-circunferência $\mathscr{C}$ bem como a reta com que $\mathscr{C}$ se assemelha numa vizinhança de A, a que chamaremos, ainda sem grande rigor, ≪reta tangente a $\mathscr{C}$ no ponto A≫:

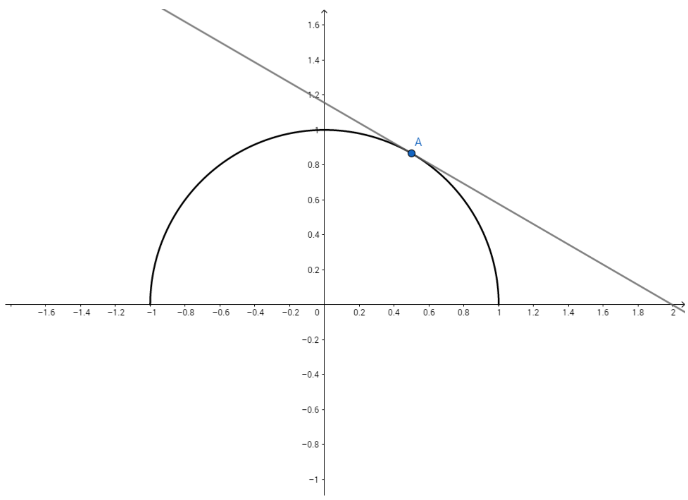


Figura 1.5: Reta tangente a $\mathscr{C}$ no ponto A

Colocam-se agora várias questões: como podemos definir de forma adequada a reta tangente ao gráfico de uma função num ponto? Em que condições uma tal reta existe? Quando é o caso, haverá uma forma prática e simples de a obter, pelo menos para uma família de funções razoavelmente numerosa?

1.2 Retas tangentes ao gráfico de uma função

Consideremos uma função f e um ponto a do respetivo domínio. Vamos definir a reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$ como aquela que - de entre todas as retas que passam por A - melhor aproxima localmente o gráfico de f, como se representa na figura seguinte:

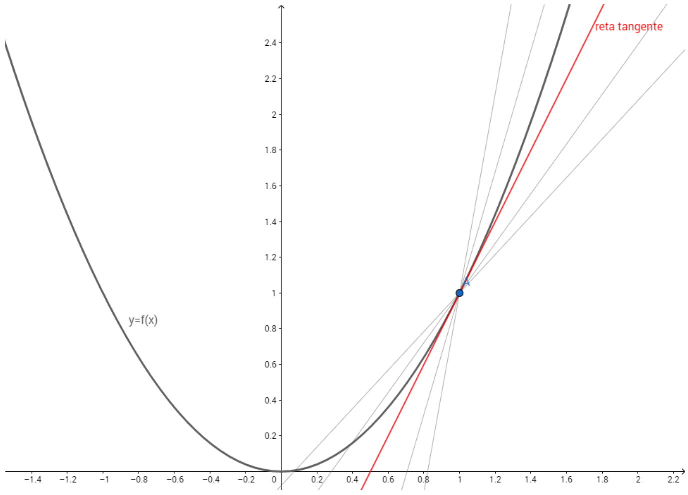


Figura 1.6: Reta tangente ao gráfico de f no ponto A

Mais concretamente,

Definição 1.2.1: Reta tangente

Seja f uma função e a um ponto não isolado do respetivo domínio.
A reta t de equação $y = T(x)$ diz-se «tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$» se $A \in t$ e se, para toda a função afim R tal que $R(a) = f(a)$, existir uma vizinhança $\mathcal{V}_a$ de a tal que

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap D, |f(x) - T(x)| \leq |f(x) - R(x)|.$$

Uma primeira consequência desta definição é a seguinte: se f for afim numa vizinhança de a, então a (única) reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$ é a reta que coincide com o gráfico de f nessa mesma vizinhança.

O resultado seguinte garante a unicidade da reta tangente:

Proposição 1.2.1 Seja f uma função de domínio D e a um ponto não isolado do respetivo domínio. Então, existe no máximo uma reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$.

Prova. *Suponhamos a existência de duas retas tangentes t_1 e t_2, de equações, respetivamente, $y = T_1(x)$ e $y = T_2(x)$.*
Pela definição de reta tangente, existem vizinhanças $\mathcal{V}_a^{(1)}$ e $\mathcal{V}_a^{(2)}$ tais que

$$\forall x \in \mathcal{V}_a^{(1)} \cap D, \ |f(x) - T_1(x)| \leq |f(x) - T_2(x)|$$

e

$$\forall x \in \mathcal{V}_a^{(2)} \cap D, \ |f(x) - T_2(x)| \leq |f(x) - T_1(x)|.$$

Assim, na vizinhança $\mathcal{V}_a = \mathcal{V}_a^{(1)} \cap \mathcal{V}_a^{(2)}$, tem-se

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap D, |f(x) - T_1(x)| = |f(x) - T_2(x)|,$$

ou seja, para todo o $x \in \mathcal{V}_a \cap D$,

$$T_1(x) = T_2(x) \vee f(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) + T_2(x)).$$

Se existirem dois pontos distintos de $\mathcal{V}_a \cap D$ em que T_1 e T_2 coincidem, então, tratando-se de funções afins, $T_1 = T_2$, o que termina a prova. Caso contrário, tem-se $f(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) + T_2(x))$

exceto eventualmente num ponto (distinto do ponto a). Esta igualdade é então válida numa vizinhança de a, f é afim numa vizinhança de a (enquanto combinação linear de funções afins) e, tal como vimos, $f = T_1 = T_2$ nessa vizinhança.

Estudemos agora o delicado problema da existência da reta tangente. Para o efeito, consideremos um ponto x do domínio de f e a reta r_x que passa pelos pontos $A(a; f(a))$ e $M(x; f(x))$ do gráfico de f. O declive desta reta é dado por

$$m_x = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando x tende para a, a reta r_x tende, num certo sentido vago, para a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto A. É pois razoável pensar-se que o declive de t é dado pelo limite $\lim\limits_{x\to a} m_x$.

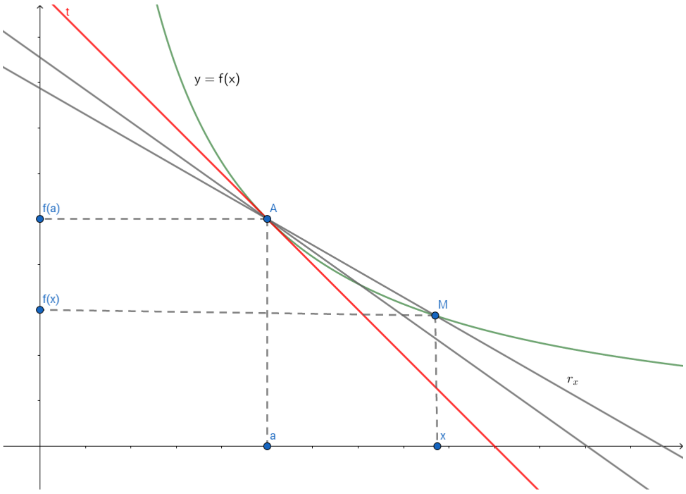


Figura 1.7: Reta tangente enquanto limite de retas secantes

A proposição seguinte garante que esta intuição está correta, fornecendo também uma condição necessária e suficiente para a existência da reta tangente.

Proposição 1.2.2 Seja f uma função e a um ponto de respetivo domínio D. O gráfico de f admite uma reta tangente no ponto $A(a; f(a))$ se e só se o limite

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existir e for finito. Nesse caso, a reta tangente tem por equação

$$y = f(a) + m(x - a),$$

isto é, trata-se da reta de declive m que passa por A.

Prova. *Comecemos por supor que existe* $m = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.
Seja então $T : x \to f(a) + m(x - a)$ *e* R *uma qualquer função afim tal que* $R(a) = f(a)$. *Trata-se de mostrar a existência de uma vizinhança* $\mathscr{V}_a$ *de* a *tal que*

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D,\ |f(x) - T(x)| \leq |f(x) - R(x)|.$$

Sendo m' *o declive da reta de equação* $y = R(x)$, *esta condição é equivalente a*

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D, |f(x) - f(a) - m(x - a)| \leq |f(x) - f(a) - m'(x - a)|$$

ou ainda, dividindo a desigualdade por $|x-a|$, a

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D \setminus \{a\}, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m'\right|.$$

A existência de uma tal vizinhança é imediata por definição de limite.

No sentido inverso, suponhamos que $y = f(a) + m(x-a)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$
Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos, uma vez mais, a reta de equação $y = f(a) + m'(x-a)$, onde o declive m' será fixado um pouco mais tarde. Existe então uma vizinhança $\mathscr{V}_a$ de a tal que

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D \setminus \{a\}, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m'\right|.$$

Elevando esta desigualdade ao quadrado, obtém-se que

$$-2m\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + m^2 \leq -2m'\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + m'^2,$$

ou ainda que

$$2(m'-m)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq (m'-m)(m'+m).$$

Tomando $m' = m + 2\varepsilon$, resulta a existência de uma vizinhança $\mathscr{V}_a^{(1)}$ tal que $\forall x \in \mathscr{V}_a^{(1)} \cap D \setminus \{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \leq \varepsilon$.
Da mesma forma, escolhendo $m' = m - \varepsilon$, obtém-se a existência de uma segunda vizinhança $\mathscr{V}_a^{(2)}$ com $\forall x \in \mathscr{V}_a^{(2)} \cap D \setminus \{a\}$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \geq -\varepsilon$.
Finalmente, considerando $\mathscr{V}_a = \mathscr{V}_a^{(1)} \cap \mathscr{V}_a^{(2)}$,

$$\forall x \in \mathscr{V}_a \cap D \setminus \{a\}, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m\right| < \varepsilon,$$

o que conclui a prova.

1.3 Derivada de uma função num ponto

Dada uma função f e dois pontos a, x do respetivo domínio, o declive da reta que passa pelos pontos $A(a; f(a))$ e $B(x; f(x))$ é dado por

$$m_x = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Esta quantidade mede o incremento médio de f, entre a e x, sendo por vezes designada por ≪taxa média de variação de f entre a e x≫.

Alguns exemplos:

- Se colocarmos em movimento um ponto material no instante $t = 0$ e designarmos por $d(t)$ a distância total que percorreu passados t segundos, $\dfrac{d(t)-d(a)}{t-a}$ é a distância média percorrida por segundo entre os instantes a e t, a chamada ≪velocidade média≫.
- A corrente elétrica caracteriza-se por um movimento de cargas elétricas (eletrões) ao longo de um fio condutor. Denotando por $q(t)$ a quantidade de carga que atravessou uma dada secção do fio a partir do instante inicial $t = 0$, dá-se o nome de ≪intensidade média de corrente≫ à taxa média de variação $\dfrac{q(t)-q(a)}{t-a}$. Este quociente representa a quantidade média de carga por unidade de tempo que atravessou a secção.

- Sendo $C(n)$ o custo de produção das n primeiras unidades de um dado produto, a taxa média de variação $\dfrac{C(n)-C(a)}{n-a}$ representa o custo médio de produção de cada uma das unidades entre a $(a+1)^{\text{ésima}}$ e a $n^{\text{ésima}}$ produzidas.

Tal como vimos, na situação (e apenas na situação) em que o gráfico de f admite uma reta tangente no ponto $A(a;f(a))$, o limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe e é finito, definindo-se assim uma «taxa de variação instantânea» ou «taxa de aumento» de f no ponto a. Trata-se da noção central do cálculo diferencial e serve de definição para numerosas grandezas fundamentais em Física, em Engenharia ou em Economia:

Definição 1.3.1: Derivada de uma função num ponto

Seja f uma função de domínio $D\subset\mathbb{R}$ e $a\in D$. Define-se a «derivada de f no ponto a» por

$$f'(a):=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

quando este limite existe e é finito.
A função f diz-se então «diferenciável no ponto a».

Observação 1.3.1. *Utilizando a mudança de variável $h=x-a$ no limite acima obtém-se uma definição equivalente para a derivada de f no ponto a:*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Retomando os exemplos anteriores, define-se a «velocidade instantânea» no instante a por

$$v(a):=d'(a)=\lim_{t\to a}\frac{d(t)-d(a)}{t-a}.$$

Ao olharmos para o painel de um automóvel, é esta a informação que recebemos em cada instante sobre a velocidade do veículo. Da mesma forma, a «intensidade da corrente elétrica» é definida por

$$i(t):=q'(a)=\lim_{t\to a}\frac{q(t)-q(a)}{t-a}.$$

Em Economia, as taxas de variação instantâneas estão essencialmente ligadas à «marginalidade», conceito a que voltaremos um pouco mais tarde.

Tendo em conta a Proposição 1.2.2, temos o seguinte resultado imediato:

Teorema 1.3.1: Diferenciabilidade e reta tangente

Seja f uma função e a um ponto do respetivo domínio.
O gráfico de f admite uma reta tangente no ponto $A(a;f(a))$ se e só se f for diferenciável em a. Nesse caso, a equação reduzida da reta tangente é

$$y=f(a)+f'(a)\,(x-a)\,.$$

A diferenciabilidade traduz a ideia de o gráfico de f poder ser localmente aproximado por uma reta. É pois natural que uma função diferenciável num dado ponto seja também contínua:

Teorema 1.3.2: Diferenciabilidade e continuidade

Seja f uma função de domínio $D \subset \mathbb{R}$ e a um ponto de D. Se f for diferenciável em a então f é contínua em a.

Prova. *Seja $x \in D$. Tem-se*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Passando ao limite,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + 0 \times f'(a) = f(a),$$

pelo que, por definição, f é contínua em a.

Aplicação 1: Marginalidade

Seja $C : x \to C(x)$ a função «custo de produção»: $C(x_0)$ representa o custo de produção de x_0 unidades de um determinado produto. O custo de produção da $(x_0+1)^{\text{ésima}}$ unidade é portanto dado por

$$C(x_0+1) - C(x_0).$$

Em certos contextos , a variável x é à partida um número inteiro (imaginemos por exemplo que x representa o número de lâmpadas produzidas numa dada fábrica). Contudo, mesmo nessas situações - nomeadamente para grandes volumes de produção ($x \gg 1$) - é útil considerar modelos contínuos. Nesse caso, utilizaremos a seguinte definição:

Definição Se C for diferenciável em x_0 define-se o «custo marginal $MC(x_0)$» por

$$MC(x_0) := C'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{C(x_0+h)-C(x_0)}{h}.$$

Observe-se que, para $x_0 \gg 1$,

$$MC(x_0) = C'(x_0) \approx \frac{C(x_0+1)-C(x_0)}{1} = C(x_0+1) - C(x_0),$$

interpretando-se assim o custo marginal como o custo de produção de uma unidade adicional.

Nas aplicações à Economia, a noção de marginalidade fica assim intimamente ligada à de derivada, definindo-se também, por exemplo, a «receita marginal» ou o «lucro marginal». Estas quantidades representam respetivamente uma aproximação da receita e do lucro obtidos com a venda de uma unidade de produção suplementar:

Definição Seja $R(x)$ e $L(x)$ a receita e o lucro obtidos, respetivamente, com a venda de x unidades de um determinado produto. Se R for diferenciável em x_0, define-se a «receita marginal» por

$$MR(x_0) := R'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{R(x_0+h)-R(x_0)}{h}.$$

Da mesma forma, se L for diferenciável em x_0, o «lucro marginal» é dado por

$$ML(x_0) := L'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{L(x_0+h)-L(x_0)}{h}.$$

1.4 Exercícios do Capítulo 1

Exercício 1.4.1 Estude a existência de reta tangente ao gráfico das seguintes funções nos pontos indicados, e, caso exista, determine a respetiva equação reduzida:

(a) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{6}\right)$ no ponto $(0; f(0))$

(b) $g(x) = e^{3x}$ no ponto $(0; g(0))$

(c) $h(x) = |5 - x|$ no ponto $(5; h(5))$

(d) $i(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto $(0; i(0))$

(e) $f(x) = 5 - 4x$ no ponto $(1; f(1))$;

(f) $g(x) = x^2 - 2$ no ponto $(2; g(2))$;

(g) $h(x) = \sqrt{x}$ no ponto $(0; h(0))$.

(h) $i(x) = \dfrac{1 - e^{2x}}{\cos(x)}$ no ponto $(0; i(0))$.

Exercício 1.4.2 Considere a função v definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$v(x) = x^2 - 4x.$$

Determine as coordenadas do ponto P, sabendo que pertence ao gráfico de v, e que a equação reduzida da reta tangente a v nesse ponto é $y = 12x - 40$.

Exercício 1.4.3 Mostre que a reta tangente ao gráfico da função definida por

$$t(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12,$$

no ponto de abcissa 2, é uma reta horizontal.

Exercício 1.4.4 Considere a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ pela expressão $f(x) = \sqrt{2x}$.

(a) Calcule a taxa média de variação de f entre $x = 2$ e $x = 8$.

(b) Calcule a taxa de variação instantânea de f no ponto $x = 2$.

(c) Explicite a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(2; f(2))$.

Exercício 1.4.5 Estude a diferenciabilidade das seguintes funções, nos pontos indicados:

(a) $g(x) = \begin{cases} e^{5x} - 2 & se\ x \neq 0 \\ -1 & se\ x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$;

(b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{4-4x^2} - 1}{x - 1} & se\ x \neq 1 \\ 0 & se\ x = 1 \end{cases}$, no ponto $x = 1$;

(c) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(x)}{1 - e^{2x}} & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$;

(d) $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases}$, no ponto $x = 0$;

(e) $\theta(x) = |x^2 - 3x|$, nos pontos $x = 1$ e $x = 3$.

2. Função derivada

2.1 Definição e primeiros exemplos

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in D$, utilizámos a notação $f'(a)$ para referir o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ficou assim definida implicitamente uma nova função f', que designaremos de agora em diante por ≪função derivada de f≫:

Definição 2.1.1: Função derivada

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$$D_1 = \{x \in D : \ f \text{ é diferenciável em } x\ \} \subset D.$$

Define-se então a ≪função derivada de f≫ por

$$f' \ : x \in D_1 \to f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Exemplo 2.1.1 Consideremos a função f de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. A função f' pode então ser definida em $\mathbb{R}$ por $f'(x) = 2x$. De facto, para $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x.$$

Calculamos de seguida a derivada de algumas funções usuais:

- **Função constante** $f \ : x \in \mathbb{R} \to k$, $k \in \mathbb{R}$
  De maneira imediata, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

- **Função monomial** $f : x \in \mathbb{R} \to x^n$, $n \in \mathbb{N}$
  Para $x \in \mathbb{R}$, utilizando a igualdade dita do binómio de Newton, tem-se

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n = n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$

$$= n x^{n-1} h + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}.$$

  Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(n x^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right) = n x^{n-1}.$$

- **Função inversa** $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

- **Função de expoente real** $f : x \in \mathbb{R}^+ \to x^\alpha$, $\alpha > 0$
  Tem-se $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, ou seja, a fórmula obtida mais acima para a derivação do monómio x^n pode ser estendida a potências reais gerais. Ver a este propósito o último exercício desta secção.

- **Função exponencial** $f : x \in \mathbb{R} \to e^x$
  Recordemos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.
  Logo, para $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

- **Função seno** $f : x \in \mathbb{R} \to \sin(x)$
  Utilizando a igualdade trigonométrica $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, válida para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, comecemos por observar que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h}.$$

  Nos capítulos anteriores provámos que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$.
  Por outro lado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos^2(h)}{(\cos(h) + 1)h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)} = -1 \times \frac{0}{2} = 0.$$

  Finalmente,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) = \cos(x).$$

- **Função cosseno** $f : x \in \mathbb{R} \to \cos(x)$
  Utilizando agora a igualdade
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$
  pelo que $f'(x) = -\sin(x)$.

2.2 Regras de derivação elementares

O resultado seguinte permite calcular facilmente a derivada da soma, diferença, produto e quociente de duas funções f e g diferenciáveis:

Teorema 2.2.1: Regras de derivação

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $a \in \mathbb{R}$ e k um número real. Então, as funções $f+g$, kf, $f \times g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(a) \neq 0$) são diferenciáveis em a e tem-se

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
- $(kf)'(a) = kf'(a)$;
- $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Prova.

1. *Soma*
$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(a) + g'(a);$$
2. *Produto por constante*
$$(kf)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{kf(a+h)-kf(a)}{h} = k \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = kf'(a);$$
3. *Produto*
$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)(g(a+h)-g(a))+(f(a+h)-f(a))g(a)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Uma vez que f é diferenciável em a, f é igualmente contínua nesse ponto. Assim, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, *e*

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

4. *Quociente*
Como $g'(a) \neq 0$ e g é contínua em a, $g(a+h) \neq 0$ para h suficientemente pequeno,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(a+h)g(a) - g(a+h)f(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(a+h)g(a) - g(a+h)f(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{(f(a+h) - f(a))g(a) - (g(a+h) - g(a))f(a)}{g(a+h)g(a)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a) - \frac{g(a+h)-g(a)}{h} f(a)}{g(a+h)g(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

onde utilizámos mais uma vez a continuidade de g em a.

Aplicação 2: Ilustração: fórmula de derivação do produto

A procura $Q = Q(p)$ de um determinado bem é função do respetivo preço unitário de venda p, sendo expetável que $Q(p)$ aumente quando p diminui (e vice-versa). A receita total que se obtém ao colocar no mercado o bem a um preço p é então dada por

$$R(p) = p \times Q(p).$$

Imaginemos agora que aumentamos em 1 u.m. o preço de venda. A receita sofre então dois efeitos: o primeiro, positivo, é uma consequência do aumento da receita gerado por cada unidade vendida; o segundo, negativo, resulta de se venderem menos unidades.
Para analisarmos este duplo movimento, vamos decompô-lo, ainda que de forma algo abusiva, em duas componentes independentes:

- **Efeito do aumento de preço, mantendo-se a procura**
  A receita aumenta $1 \times Q(p)$ u.m.;
- **Efeito da diminuição da procura, mantendo-se o preço**
  A receita diminui de $p \times (Q(p) - Q(p+1)) \approx -p \times Q'(p)$.

Ao sobrepormos estes dois fenómenos, a taxa de variação da receita é de

$$R'(p) = 1 \times Q(p) - (-p \times Q'(p)) = p' \times Q(p) + p \times Q'(p),$$

o que corresponde, de facto, à fórmula de derivação do produto que demonstrámos mais acima.

Exemplo 2.2.1 Considere-se a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = 4x^2 + x\sin(x).$$

As funções $g : x \to 4x^2$ e $h : x \to x\sin(x)$ são produto de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, logo diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Sendo a função f a soma destas duas funções, f é diferenciável em $\mathbb{R}$.
Pelo teorema anterior ,

$$g'(x) = 4(x^2)' = 8x.$$

Também, atendendo à fórmula de derivação do produto,

$$h'(x) = x' \sin(x) + x \sin'(x) = \sin(x) + x\cos(x).$$

Finalmente, $f'(x) = g'(x) + h'(x) = 8x + \sin(x) + x\cos(x)$.

Calculemos agora uma expressão para a função derivada da função tangente:

Exemplo 2.2.2 Derivada da função tangente

Pelo teorema de derivação do quociente, a função tangente $x \to \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ é diferenciável no respetivo domínio

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{R} \right\}$$

e tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Note-se também que

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x),$$

obtendo-se assim uma expressão equivalente para a função derivada da função tangente.

Aplicação 3: Modelo contínuo vs. modelo discreto

Exercício

O custo de fabricar x unidades de um determinado produto é dado por

$$C(x) = 11000 + 600x - \frac{x^2}{4} \; u.m.$$

(a) Calcule o custo marginal de produção no caso de serem fabricadas 1000 unidades do produto.
(b) Compare o custo marginal obtido em a. com a diferença no custo se forem fabricadas 1001 unidades em vez de 1000.

Resolução

(a) Tem-se $MC(x) = C'(x) = 600 - \frac{1}{2}x$ e $MC(1000) = 100$.
(b) Por outro lado, o custo de produção da $1001^{\text{ésima}}$ unidade é igual a

$$C(1001) - C(1000) = 99,75 \; u.m.$$

Aplicação 4: Custo médio de produção e custo marginal

O custo médio de produção de x unidades de um determinado bem é naturalmente dado por

$$C_{\text{médio}}(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Se o custo marginal $MC(x)$ - que, como vimos, pode ser interpretado como o custo de

produção da $(x+1)^{\text{ésima}}$ unidade - for superior à média $C_{\text{médio}}(x)$, é razoável esperar que esta média tenda a aumentar se se aumentar um pouco a produção, isto é, que a taxa $C'_{\text{médio}}(x)$ seja positiva.
De forma análoga, se $MC(x) < C_{\text{médio}}(x)$ ter-se-á $C'_{\text{médio}}(x) < 0$.
Recorrendo à fórmula de derivação do quociente de duas funções diferenciáveis, a verificação destes factos é imediata:

$$\left(\frac{C}{x}\right)'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)x'}{x^2} = \frac{1}{x}\left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right),$$

ou seja,

$$C'_{\text{médio}}(x) = \frac{1}{x}\left(MC(x) - C_{\text{médio}}(x)\right),$$

pelo que a taxa $C'_{\text{médio}}(x)$ tem efetivamente o sinal da diferença $MC(x) - C_{\text{médio}}(x)$.

Exercício
O custo diário de produção de x unidades de um produto é dado por

$$C(x) = 230000 + 200x - 10x^2 + x^3 \, u.m.$$

(a) Calcule o custo médio unitário de produção de 50 e de 100 unidades diárias.
(b) Determine o custo marginal de produção para produções de 50 e 100 unidades.
(c) Qual o efeito no custo médio unitário de produção de um pequeno aumento da quantidade produzida a partir das 50 e das 100 unidades?

Resolução

(a) O custo médio unitário de produção de x unidades é dado por

$$C_{\text{médio}}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{230000}{x} + 200 - 10x + x^2 \; u.m/\text{unidade}.$$

Assim, os custos médios unitários de produção de 50 e de 100 unidades, são, respetivamente,

$$C_{\text{médio}}(50) = 6800 \; u.m/\text{unidade e } C_{\text{médio}}(100) = 11500 \; u.m/\text{unidade}.$$

(b) Tem-se $MC(x) = C'(x) = 200 - 20x + 3x^2$. Assim,

$$MC(50) = 6700 \; u.m/\text{unidade e } MC(100) = 28200 \; u.m/\text{unidade}.$$

(c) Um pequeno aumento da produção a partir das 50 unidades resulta numa diminuição do custo médio porque o custo aumenta a uma taxa inferior ao custo médio ($MC(50) < C_{\text{médio}}(50)$).
Em contrapartida, como $MC(100) > C_{\text{médio}}(100)$, um pequeno aumento da produção a partir das 100 unidades resulta num aumento do custo médio unitário de produção.

2.3 Derivada da função composta

Um aspeto fundamental do cálculo diferencial é o facto da composta de duas funções diferenciáveis ser diferenciável, sendo relativamente simples calcular a derivada da função composta a partir das derivadas das funções iniciais:

Teorema 2.3.1: Derivada da função composta

Sejam f e g duas funções de domínios respetivos D_f e D_g tais que:

- f é diferenciável em $a \in D_f$;
- g é diferenciável em $b = f(a) \in D_g$.

Então, se $b \in D'_{f \circ g}$, $f \circ g$ é diferenciável em b e tem-se

$$(f \circ g)'(b) = f'(g(b))\, g'(b).$$

Prova. *Seja $h \neq 0$ tal que $b+h \in D_{f\circ g}$. Então,*

$$\begin{aligned}\frac{f(g(b+h)) - f(g(b))}{h} &= \frac{f(g(b+h)) - f(g(b))}{g(b+h) - g(b)} \times \frac{g(b+h) - g(b)}{h}.\\ &= \frac{f(g(b)+\varepsilon(h)) - f(g(b))}{\varepsilon(h)} \times \frac{g(b+h) - g(b)}{h},\end{aligned}$$

onde $\varepsilon(h) = g(b+h) - g(b)$. Como g é diferenciável em b, g é contínua em b pelo que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Assim, por composição de limites,

$$(f \circ g)'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(b)+\varepsilon(h)) - f(g(b))}{\varepsilon(h)} \times \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = f'(g(b)) \times g'(b).$$

Note-se que este raciocínio apenas é válido se, para h suficientemente pequeno e não nulo, $g(b+h) \neq g(b)$. Se existirem sucessões de reais não nulos (h_n) com $\lim h_n = 0$ e, para todo o n, $g(b+h_n) = g(b)$, é ainda necessário verificar que

$$\lim \frac{f(g(b+h_n)) - f(g(b))}{h_n} = f'(g(b)) \times g'(b),$$

o que é trivial já que, nesta situação,

$$g'(b) = \lim \frac{g(b+h_n) - g(b)}{h_n} = 0$$

e, por outro lado, $\dfrac{f(g(b+h_n)) - f(g(b))}{h_n}$ é a sucessão nula.

Como primeira aplicação, podemos calcular uma expressão para a derivada da função exponencial com base $a > 0$ arbitrária:

- **Função exponencial** $f : x \in \mathbb{R} \to a^x$, $a > 0$
  Tem-se $a^x = e^{\ln(a)x} = f \circ g(x)$, com $g(x) = \ln(a)x$ e $f(x) = e^x$. Assim,

$$(a^x)' = g'(x) f'(g(x)) = \ln(a) e^{\ln(a)x} = \ln(a) a^x.$$

Exemplo 2.3.1 Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \cos(\sin(x))$. As funções $f = \cos$ e $g = \sin$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Assim, como $h = f \circ g$, h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = -\sin(\sin(x)) \cos(x).$$

Exemplo 2.3.2 Considere-se a função polinomial h definida em $\mathbb{R}$ pela expressão

$$h(x) = \left(x^3 + e^{2x}\right)^7.$$

Observando que $h = f \circ g$, onde f e g são as funções definidas respetivamente por $f(x) = x^7$ e $g(x) = x^3 + e^{2x}$, tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = 7\left(x^3 + e^{2x}\right)^6 \left(3x^2 + 2e^{2x}\right).$$

Aplicação 5: Relação entre taxas de aumento

Exercício
O custo de produção de x unidades de um determinado produto é dado por

$$C(x) = \frac{x^2}{5000} + 4x + 15000 \text{ u.m.}$$

Atualmente, a produção é de 12500 unidades por mês, o que corresponde a uma taxa de aumento do custo mensal de produção de 990 u.m.
Calcule a taxa atual de aumento de produção.

Resolução Seja $x(t)$ o número de unidades produzidas no mês t. O custo mensal de produção é então dado pela função composta $C_m = C \circ x$, ou seja,

$$C_m(t) = C(x(t)) = \frac{x^2(t)}{5000} + 4x(t) + 15000.$$

Pelo teorema de derivação da função composta,

$$C_m'(t) = \frac{2x(t)x'(t)}{5000} + 4x'(t) = x'(t)\left(\frac{x(t)}{2500} + 4\right).$$

Sendo a produção de $x(t) = 12500$ unidades mensais e a taxa de aumento do custo mensal de produção de $C_m'(t) = 990\,u.m.$, conclui-se que a taxa atual de aumento de produção é de

$$x'(t) = \frac{C_m'(t)}{\frac{x(t)}{2500} + 4} = 110\,\text{unidades/mês}.$$

2.4 Derivada da função inversa

Dada uma função f bijetiva, diferenciável em $a \in D_f$, coloca-se o problema de saber se a função inversa de f, f^{-1}, é diferenciável no ponto $b = f(a)$. Tal como vimos, os gráficos de f e de g são simétricos relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim, se o gráfico de f admitir uma tangente t não horizontal no ponto $(a;b)$, é expectável que a reflexão ortogonal de t relativamente à bissetriz, t', seja tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(b;a) = (b; f^{-1}(b))$.

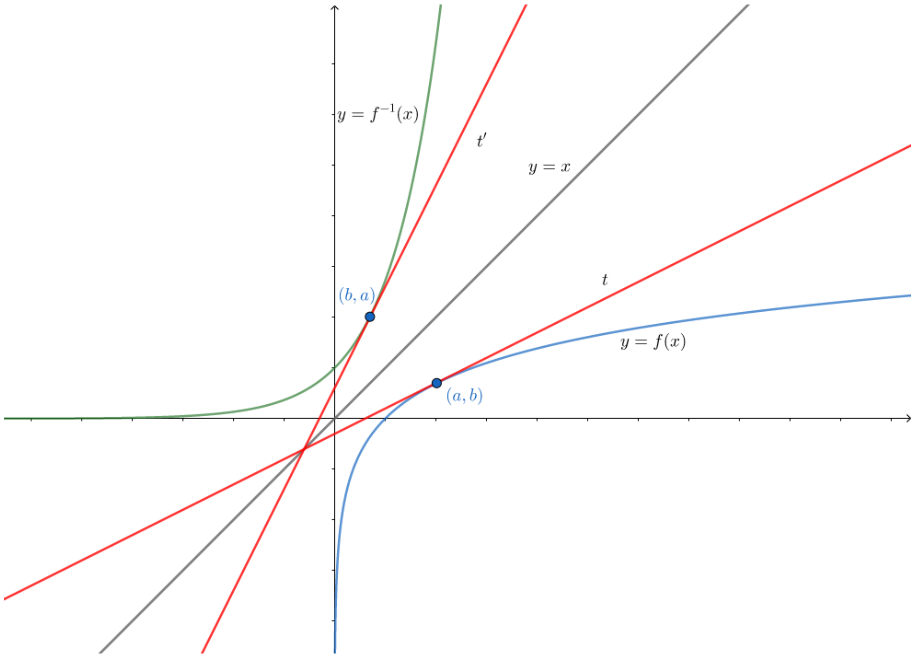


Figura 2.1: Reta tangente ao gráfico de f^{-1}

Sendo $y = mx + d$ a equação reduzida da reta t, com $m \neq 0$ e $d \in \mathbb{R}$, a equação da reta t' é dada por $x = my + d$, seja $y = \frac{1}{m}x - \frac{d}{m}$. Os declives destas retas são, respetivamente, $f'(a)$ e $(f^{-1})'(b)$. Assim, $f^{-1}(b) = \frac{1}{m} = \frac{1}{f'(a)}$. É este resultado que sintetizamos no

Teorema 2.4.1: Derivada da função inversa

Seja f uma função bijetiva, diferenciável num ponto $a \in \mathbb{R}$ e tal que $f'(a) \neq 0$. Então a respetiva função inversa f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e tem-se

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Prova. *Tendo em conta a definição de reta tangente, poder-se-ia formalizar um pouco o argumento geométrico mais acima por forma a obter-se uma demonstração correta deste resultado. Optamos aqui por fornecer uma prova analítica. Para todo o $h \neq 0$ tal que $b + h \in D_{f^{-1}}$,*

$$\frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{(b+h) - b} = \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))} =$$

$$= \left(\frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}\right)^{-1} = \left(\frac{f(f^{-1}(b+h)) - f(a)}{f^{-1}(b+h) - a}\right)^{-1}.$$

Sendo f diferenciável em a, f é contínua em a, pelo que, tal como vimos na secção anterior, f^{-1} é contínua em b: $\lim_{h \to 0} f^{-1}(b+h) = f^{-1}(b) = a$. Assim, por composição de limites,

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = (f'(a))^{-1},$$

tal como queríamos mostrar.

Observação 2.4.1. *Resulta desta prova de maneira imediata que se $f'(a) = 0$ então f^{-1} não é diferenciável em b.*

Este resultado permitir-nos-á justificar a diferenciabilidade das funções logaritmo $\log_a$ $(a > 0, a \neq 1)$ e das funções arccos, arcsin e arctan, bem como exprimir as respetivas derivadas em termos de funções racionais ou de radicais de funções racionais. Com efeito, estas funções foram introduzidas enquanto funções inversas de funções exponenciais e trigonométricas (com eventuais restrições de domínio), que são diferenciáveis.

- **Função logaritmo neperiano** $f^{-1} : x \in \mathbb{R}^+ \to y = \ln(x)$
  A função $f : y \in \mathbb{R} \to e^y$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = e^y \neq 0$. Assim, ln é diferenciável no seu domínio e tem-se para todo o $x > 0$

$$\ln'(x) = \frac{1}{f'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

  É então imediato observar que para $a > 0$ $(a \neq 1)$ e para todo o $x > 0$,

$$\log_a'(x) = \left(\frac{\ln}{\ln(a)}\right)'(x) = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

- **Função arcotangente** $f^{-1} : x \in \mathbb{R} \to y = \arctan(x)$
  A função $f : y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \tan(y)$ é diferenciável no seu domínio e, para todo o $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(y) = 1 + \tan^2(y) \neq 0$. Logo, arctan é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- **Função arcosseno** $f^{-1} : x \in [-1;1] \to \arcsin(x)$
  A função $f : y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to \sin(y)$ é diferenciável no seu domínio e, para todo o $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(y) = \cos(x) \neq 0$,

  Logo, para todo o $x \in [-1;1] \setminus \{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\} =]-1;1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

  onde se utilizou que $\cos(\arcsin(x)) > 0$ uma vez que $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

- **Função arcocosseno** $f^{-1} : x \in [-1;1] \to \arccos(x)$
  A função $f : y \in [0;\pi] \to \cos(y)$ é diferenciável no seu domínio e, para todo o $y \in]0;\pi[$, $f'(y) = -\sin(x) \neq 0$,

  Logo, para todo o $x \in [-1;1] \setminus \{\cos(0);\cos(\pi)\} =]-1;1[$,

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

  onde, tal como no exemplo anterior, se utilizou que $\sin(\arccos(x)) > 0$ $(x \in]0;\pi[)$.

2.5 Exercícios do Capítulo 2

Exercício 2.5.1 Calcule, pela definição, a derivada de cada uma das funções, no respetivo domínio:

(a) x^3 (b) e^{5x} (c) $\cos(2x)$

(d) $\sin(\frac{x}{6})$ (e) $\tan(x)$ (f) $\tan(4x)$

(g) $\ln(3x)$ (h) $\dfrac{x+1}{2-x}$ (i) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{7}$

(j) $5x^2-3x+7$ (k) $4-\sqrt{x+3}$ (l) $\dfrac{x-1}{x^2+3x}$

Exercício 2.5.2 Utilizando as regras de derivação estudadas neste capítulo, derive as funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) x^6-3x^4+5x-4 (b) $\dfrac{1}{2}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$ (c) $\pi\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{x^3}$

(d) $\dfrac{4-x}{4+x}-\dfrac{\beta}{x^5},\ \beta\in\mathbb{R}$ (e) $\dfrac{x}{1-3x}-\dfrac{1-3x}{3}$ (f) $\dfrac{2-5x}{x^2-3x+8}$

(g) $10\sin(x)-4\cos(x)$ (h) $\tan(x)\ln(x)$ (i) $\dfrac{\arctan(x)}{x}$

(j) $\dfrac{e^x\arcsin(x)}{\sqrt{3x-5}}$ (k) $\dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{x\sin(x)-\cos(x)}$ (l) $x\arccos(x)$

(m) $3e^x\arctan(x)$ (n) $x\ln(x)-x$ (o) $\dfrac{x}{\ln(x)}$

(p) $x\log_{\frac{1}{3}}(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{x^6}$ (q) $\dfrac{1-e^x}{3+e^x}$ (r) $x\log_{\frac{1}{3}}(x)$

(s) $\dfrac{1-e^x}{3+e^x}$ (t) $x^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ (u) e^{2x}

(v) $e^{5+x^2+4\sqrt{x}}$ (w) $e^{\sin(x)}$ (x) $e^{\cos(x)}$

(y) $e^{\arcsin(x)}$ (z) $e^{\arccos(x)}$

(aa) $e^{\arctan(x)}$ (bb) $e^{\sqrt{5x^3-3x^2+6}}$ (cc) $\ln(\sin(x))$

(dd) $\ln(\cos(x))$ (ee) $\ln(\tan(x))$ (ff) $\ln(\arcsin(x))$

(gg) $\ln(\arccos(x))$ (hh) $\ln(\arctan(x))$ (ii) $\ln(2x-5)$

(jj) $\ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$ (kk) $\sin(5x+2)$ (ll) $\sin(x^3-2e^x)$

(mm) $\cos(x^3-\ln(x)+6)$ (nn) $\cos\left(\ln(4x)-\dfrac{1}{x}\right)$ (oo) $\tan(1-x)$

(pp) $\tan\left(\frac{3+x}{4-x}\right)$ (qq) $\arcsin(10x-2)$ (rr) $\arccos\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(ss) $\arctan(2x)$ (tt) $\arctan(e^x)$ (uu) $\cos(\sqrt[3]{2-x^5})$

(vv) $\arctan(\sqrt{x^2+1})$ (ww) $\ln^2(x)$ (xx) $\cos^2(x)$

(yy) $\sin^6(x)$ (zz) $\arctan^3(x)$

(aaa) $\arccos^2(x)$ (bbb) $x\arctan^2(x)$ (ccc) $\sqrt[5]{\arctan(x)}$

(ddd) $\sqrt{\arctan(x)-x}$ (eee) $\sqrt[5]{\ln(x)-x}$ (fff) $\sqrt[3]{3e^{2x}-4^x}$

(ggg) $\tan^3(\frac{x}{2})$ (hhh) $\ln^5(1-x+x^2)$ (iii) $x\ln^3(5x-1)$

(jjj) $\sin^4(e^x+2)$ (kkk) $x\cos^3(2x-4)$

Exercício 2.5.3 Sabendo que as seguintes funções são invertíveis numa vizinhança $\mathscr{V}_a$ do ponto a indicado (isto é, a respetiva restrição a $\mathscr{V}_a$ é bijetiva), calcule a derivada da respetiva função inversa no ponto $b = f(a)$.

(a) $f(x) = x^5+x^3+x+4$, no ponto $a=-1$;

(b) $g(x) = 2e^{-x}-e^x-x^3-x$, no ponto $a=0$;

(c) $h(x) = \arccos(x)-e^x+3$, no ponto $a=0$;

(d) $i(x) = \arctan(x)+x^3-1$, no ponto $a=1$.

Exercício 2.5.4 Considere a função $f : x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \dfrac{x+2}{x-3}$.

(a) Mostre que f é invertível e que para todo o $x \neq 1$,

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}.$$

(b) Utilizando a alínea anterior mostre que para todo o $x \neq 3$,

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}.$$

(c) Obtenha novamente a expressão de $(f^{-1})'(x)$ utilizando desta vez o teorema de derivação da função inversa.

Exercício 2.5.5 Neste exercício pretende-se justificar a utilização da fórmula de derivação

$$(x^q)' = qx^{q-1}, \quad x>0$$

para expoentes racionais ($q \in \mathbb{Q}$), já conhecida para $q \in \mathbb{N}_0$.

(a) Caso $q \in \mathbb{Z}^-$.
Seja $q=-n$ com $n \in \mathbb{N}$.
Observando que $x^q = f\circ g(x)$, onde $g(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = x^n$, utilize o teorema de derivação da função composta para mostrar que

$$(x^q)' = qx^{q-1}, \quad x>0.$$

(b) Caso $q = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Seja $a > 0$. Utilizando por exemplo a regra de Ruffini, mostre que

$$y^n - b^n = (y-b)(y^{n-1} + y^{n-2}b + y^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).$$

(ii) Fazendo a substituição, na igualdade anterior, $y = x^{\frac{1}{n}}$ e $b = a^{\frac{1}{n}}$, obtenha que

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}}{x-a} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}a^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}}a^{\frac{2}{n}} + \cdots + a^{\frac{n-1}{n}}}$$

e, passando ao limite, deduza que

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = qx^{q-1}.$$

(c) Caso $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
Observando desta feita que $x^q = f \circ g(x)$, com $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ e $f(x) = x^m$, conclua utilizando o teorema da função composta.

Nota A igualdade obtida na alínea (ii) exprime-se, à custa do símbolo de radical, por

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0.$$

3. Derivadas e monotonia

3.1 Teoremas de Fermat, Rolle e Lagrange

Iniciamos esta secção com uma observação simples:

Proposição 3.1.1 Seja f uma função crescente (respetivamente decrescente) e diferenciável num intervalo $]a;b[\subset \mathbb{R}$. Então, para todo o $x \in]a;b[$, $f'(x) \geq 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$).

Prova. *A prova desta propriedade é imediata. Por exemplo, se f é crescente, basta observar que se $h > 0$ e para $x \in]a;b[$, $f(x+h) - f(x) > 0$ e $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$. Logo,*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Uma possível implicação inversa (que permitisse deduzir a monotonia de f a partir do sinal de f') seria bem mais útil. Um tal resultado é contudo mais complexo e difícil de obter, e constituirá o objetivo final deste capítulo.

Apresentamos de seguida uma importante propriedade dos extremos locais de funções diferenciáveis:

Teorema 3.1.1: Teorema de Fermat

Seja f uma função e a um ponto interior do respetivo domínio.
Se f for diferenciável em a e atingir um extremo local nesse ponto, tem-se necessariamente

$$f'(a) = 0,$$

ou seja, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a; f(a))$ é horizontal.

Prova. *Suponhamos por exemplo que f atinge um máximo local em a (a prova no caso em que se trata de um mínimo local é em tudo análoga). Seja $h \neq 0$ tal que $a+h \in D_f$. Então, para h suficientemente pequeno, $f(a+h) - f(a) \leq 0$.*

Assim, $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$ *e* $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$*, pelo que*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0.$$

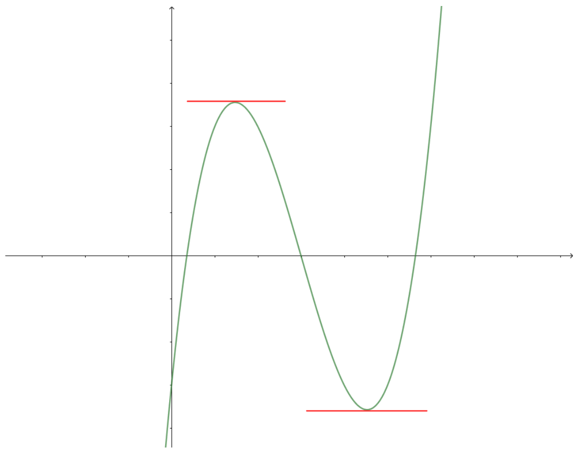


Figura 3.1: Tangentes e extremos locais

Estamos agora em medida de demonstrar o Teorema de Rolle:

Teorema 3.1.2: Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a;b]$ e diferenciável em $]a;b[$.

Se $f(a)=f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c\in]a;b[$ tal que $f'(c)=0$.

Prova. *Pelo Teorema de Weierstraß, f tem máximo e mínimo em $[a;b]$. Se um destes extremos for atingido num ponto $c\in]a;b[$, tem-se de imediato, pelo Teorema de Fermat, que $f'(c)=0$. Caso contrário, os extremos de f são $f(a)$ e $f(b)$. Como $f(a)=f(b)$, a função f é constante: tem-se $f'(c)=0$ para qualquer $c\in]a;b[$.*

Um corolário tradicional deste resultado consiste em considerar o caso particular $f(a)=f(b)=0$:

Corolário 3.1.2 Entre dois zeros consecutivos de uma função diferenciável num intervalo, existe pelo menos um zero da respetiva derivada.

Consideremos agora uma função f contínua em $[a;b]$ e diferenciável em $]a;b[$. Sem a hipótese $f(a)=f(b)$ não existe naturalmente nenhuma razão para a existência de um ponto $c\in]a;b[$ em que se tenha $f'(c)=0$. Tomemos por exemplo a função f definida no intervalo $[0;2]$ por $f(x)=e^x$. Tem-se $f(0)=1\neq f(2)=e^2$, e, para todo o $c\in]0;1[$, $f'(c)=e^c\neq 0$. Contudo, tomando os pontos $A(0;f(0))$ e $B(2;f(2))$ e observando o gráfico de f, parece existir um ponto em que a tangente ao gráfico de f é paralela à corda $[AB]$. Determinemos esse ponto: o declive da reta AB é dado por $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ enquanto que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c;f(c))$ é igual a $f'(c)$. Temos pois de resolver a equação

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0},$$

seja

$$e^c=\frac{e^2-1}{2}\Leftrightarrow c=\ln\left(\frac{e^2-1}{2}\right)\approx 1,16,\text{ com arredondamento às centésimas.}$$

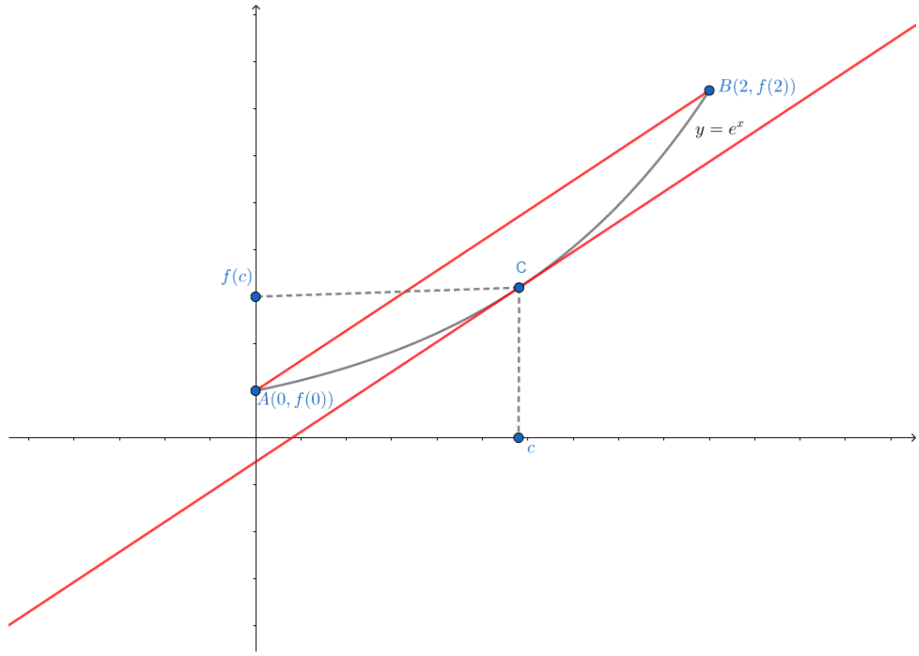


Figura 3.2: Ilustração do Teorema de Lagrange

O Teorema de Lagrange garante que a existência de um tal ponto é uma propriedade geral e será particularmente útil nas situações em que, contrariamente ao exemplo anterior, não for possível determinar explicitamente um ponto c:

Teorema 3.1.3: Teorema de Lagrange

Seja f uma função contínua em $[a;b]$ e diferenciável em $]a;b[$.
Então existe pelo menos um ponto $c \in]a;b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ou seja, sendo $A(a; f(a))$ e $B(b; f(b))$, a tangente ao gráfico de f no ponto $(c; f(c))$ é paralela ao segmento de reta $[AB]$.

Prova. *A estratégia passa por construir uma função g a que se possa aplicar o Teorema de Rolle. A equação da reta AB é*

$$y(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Tendo em conta que esta reta passa pelos pontos A e B, definindo g no intervalo $[a;b]$ por $g(x) = f(x)-y(x)$ tem-se $g(a) = g(b) = 0$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]a;b[$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c)-y'(c) = f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Observação 3.1.1. *Observe-se que o Teorema de Rolle pode ser visto como uma consequência do Teorema de Lagrange no caso em que $f(a) = f(b) = 0$. Por outro lado o Teorema de Lagrange foi demonstrado à custa do Teorema de Rolle. Isto significa que os dois enunciados são essencialmente equivalentes de um ponto de vista matemático.*

Observação 3.1.2. *O Teorema de Lagrange garante, verificadas as hipóteses de regularidade, que a taxa média de variação de uma dada função f é de facto atingida de forma instantânea num dado ponto.*
Por exemplo, consideremos um ponto material P que se desloca numa reta numérica e que ocupa, no instante t, o ponto de abcissa $x(t)$. A velocidade média de P entre os instantes t_1 e t_2 é o quociente entre a distância percorrida e o tempo escoado:

$$v_{média} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

O Teorema de Lagrange garante então a existência de um instante t entre t_1 e t_2 em que a derivada de x (ou seja, a velocidade instantânea) coincidiu com a velocidade média: $x'(t) = v(t) = v_{média}$.
Isto significa que se soubermos que um automóvel atravessou a Ponte 25 de Abril a uma velocidade média de $90\,km/h$ podemos concluir que existiu pelo menos um instante em que o automóvel circulou a precisamente $90\,km/h$. Da mesma forma, consideremos o custo médio de produção de n unidades a partir de uma dada unidade p:

$$C_{médio} = \frac{C(p+n) - C(p)}{n}.$$

O Teorema de Lagrange garante a existência de uma unidade n_0 cujo custo marginal coincidiu com o custo médio:

$$CM(n_0) = C_{médio}.$$

Uma das aplicações mais importantes do Teorema de Lagrange é a possibilidade de relacionar o sinal da derivada de uma função num dado intervalo com a respetiva monotonia:

Teorema 3.1.4: Derivada e monotonia

Seja f uma função contínua em $[a;b]$ e diferenciável em $]a;b[$. Então:

- Se para todo o $x \in]a;b[$, $f'(x) > 0$ (respetivamente $f'(x) \geq 0$) então f é estritamente crescente em $[a;b]$ (respetivamente f é crescente no sentido lato).
- Se para todo o $x \in]a;b[$, $f'(x) < 0$ (respetivamente $f'(x) \leq 0$) então f é estritamente decrescente em $[a;b]$ (respetivamente f é decrescente no sentido lato).

Prova. *Vamos demonstrar a asserção no caso em que se tem $f' > 0$ em $]a;b[$, sendo as restantes situações de prova análoga.*
Sejam $x_1, x_2 \in [a;b]$, $x_2 > x_1$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]a;b[$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0,$$

de onde se conclui, dado que $x_2 - x_1 > 0$, que se tem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.
Assim, por definição, f é estritamente crescente no intervalo $[a;b]$.

Temos o seguinte corolário imediato, que assumirá uma importância fulcral no estudo futuro da primitivação e integração:

Corolário 3.1.3 Seja f uma função diferenciável num dado intervalo aberto I, com, para todo o $x \in I$, $f'(x) = 0$.
Então f é constante em I.

Observe-se que para se concluir quanto à monotonia de uma dada função é necessário conhecer o sinal da respetiva derivada em todos os pontos do intervalo considerado: apresentamos de seguida um exemplo de uma função f tal que, apesar de se ter $f'(0) > 0$, f não é crescente em nenhuma vizinhança de 0.
Seja f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Por definição,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 + 2 \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 1$$

uma vez que se trata do produto de uma função limitada por outra que tende para 0. Por outro lado, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, $f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = -1$.

Sendo f' contínua em $\mathbb{R}^+$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_n$ de $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ em que f' é negativa: f é decrescente em $\mathcal{V}_n$. Como $\lim x_n = 0$ não existe nenhuma vizinhança da origem em que f seja crescente.

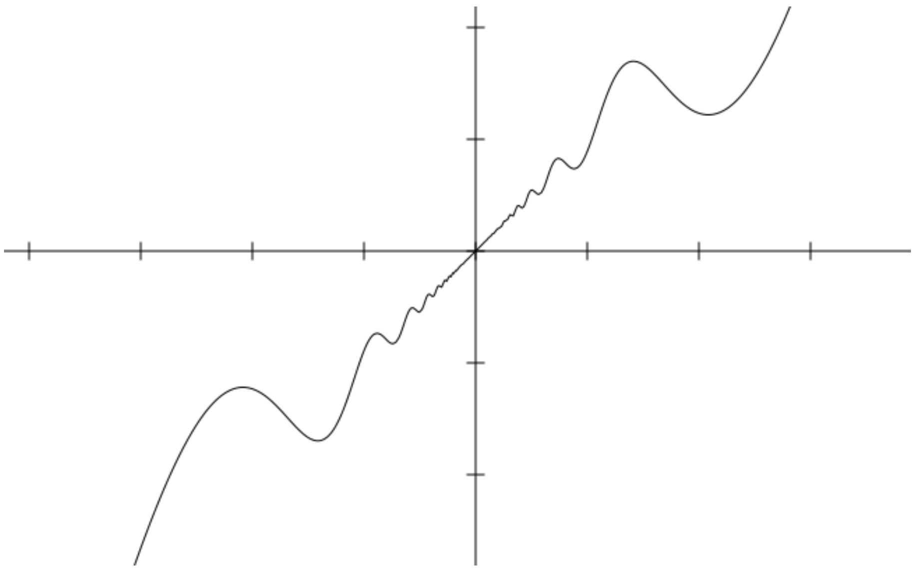


Figura 3.3: A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(0;0)$ mas f não é crescente em nenhuma vizinhança de $x = 0$

3.2 Derivada logarítmica

Comecemos por um exemplo. Numa dada empresa é necessário comprar mensalmente *toners* para as impressoras dos diferentes departamentos. O orçamento para essa compra, no mês t, é de $o(t)$. Nesse mesmo mês, cada *toner* custa à empresa $p(t)$. Presentemente, $o(t_0) = 10000\,u.m.$ e $p(t_0) = 360\,u.m.$ Contudo, prevê-se um aumento do preço dos *toners* a uma taxa de $p'(t_0) = 0,8\,u.m./\text{mês}$. Para fazer face a este aumento procedeu-se ao aumento do orçamento, com taxa $o'(t_0) = 20\,u.m./\text{mês}$. Será suficiente para compensar o aumento de preços?
Para responder a esta pergunta, observemos que o número total de *toners* que a empresa pode

adquirir mensalmente é de $\dfrac{o(t_0)}{p(t_0)}$. Pretende-se pois saber se este quociente não diminui, ou seja, se $\left(\dfrac{o}{p}\right)'(t_0) \geq 0$.
Ora,

$$\left(\frac{o}{p}\right)'(t_0) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{o'(t_0)p(t_0) - o(t_0)p'(t_0)}{p^2(t_0)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{o'(t_0)}{o(t_0)} \geq \frac{p'(t_0)}{p(t_0)}.$$

Assim, as quantidades que devem ser comparadas não são as taxas $o'(t_0)$ e $p'(t_0)$, mas antes essas mesmas taxas quocientadas respetivamente pelo orçamento $o(t)$ e pelo preço dos *toners* $p(t)$. Ou seja, as quantidades pertinentes para tratar este problema são as derivadas

$$(\ln(o))'(t_0) = \frac{o'(t_0)}{o(t_0)} \text{ e } (\ln(p))'(t_0) = \frac{p'(t_0)}{p(t_0)}.$$

Neste exemplo, vemos que o aumento previsto para o orçamento não é suficiente e que na realidade a empresa perderá poder de compra:

$$\frac{o'(t_0)}{o(t_0)} = \frac{20}{10000} = 0,002 \text{ e } \frac{p'(t_0)}{p(t_0)} = \frac{0,8}{360} = 0,0022 > 0,002.$$

Note-se igualmente que sendo o logaritmo neperiano uma função crescente em $\mathbb{R}^+$ poderíamos ter obtido exatamente o mesmo resultado observando que

$$\frac{o}{p} \text{ crescente} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{o}{p}\right) \text{ crescente,}$$

e, utilizando o teorema de derivação da função composta e as propriedades do logaritmo,

$$\left(\ln\left(\frac{o}{p}\right)\right)'(t_0) = (\ln o)'(t_0) - (\ln p)'(t_0) = \frac{o'(t_0)}{o(t_0)} - \frac{p'(t_0)}{p(t_0)}.$$

Estes factos sugerem a introdução da seguinte definição:

Definição 3.2.1: Derivada Logarítmica

Seja f uma função e x um ponto do repetivo domínio tal que $f(x) \neq 0$. Se f for diferenciável em x, a quantidade

$$(\ln \circ |f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

é designada por ≪derivada logarítmica de f no ponto x≫.

Das propriedades do logaritmo neperiano resulta de forma imediata o seguinte:

Teorema 3.2.1: Propriedades da derivada logarítmica

Sejam f e g funções positivas e diferenciáveis num ponto $x \in D_f \cap D_g$. Então,

- $(\ln(f \times g))'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
  (a derivada logarítmica do produto $f \times g$ é a soma das derivadas logarítmicas de f e de g)
- $\left(\ln\left(\dfrac{f}{g}\right)\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{g'(x)}{g(x)}$.
  (a derivada logarítmica do quociente $\dfrac{f}{g}$ é a diferença das derivadas logarítmicas de f e de g)

Exemplo 3.2.1 Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(e^{3x}+1)}{3+\sin(x)}$.
A derivada logarítmica de f é dada por

$$(\ln f)'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} - \frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}.$$

Aplicação 6: Salário real

Consideremos, num instante t, o salário nominal $S(t)$ de um dado trabalhador e $P(t)$ o índice de preços. Define-se então o salário real S_R por

$$S_R(t) = \frac{S(t)}{P(t)},$$

quantidade que mede, num certo sentido, o poder de compra do trabalhador. Face a variações do índice de preços e do salário real, o sinal da derivada logarítmica de S_R,

$$\frac{S'(t)}{S(t)} - \frac{P'(t)}{P(t)}$$

permite aferir se esse poder de compra aumenta ou diminui.

3.3 Elasticidade

Consideremos um dado bem que é vendido no mercado a um preço p. Uma alteração deste preço de venda implica, em geral, uma alteração da procura. A «elasticidade», um dos mais importantes conceitos em microeconomia, permite medir essa dependência.
Seja então $Q(p)$ a procura e p_0 o preço corrente. A variação relativa da procura quando o preço p_0 varia de Δp é igual a

$$\frac{Q(p_0+\Delta p) - Q(p_0)}{Q(p_0)}.$$

Dividindo esta quantidade pela variação relativa do preço, $\dfrac{\Delta p}{p_0}$, obtém-se a «elasticidade média da procura Q no intervalo de extremos p_0 e $p_0+\Delta p$»:

$$El_{\text{média}}(Q; p_0; p_0+\Delta_p) = \frac{p_0}{Q(p_0)} \times \frac{Q(p_0+\Delta p_0) - Q(p_0)}{\Delta p_0}.$$

Considerando um aumento de 1% no preço p_0, isto é, $\dfrac{\Delta p}{p_0} = 0{,}01$, obtém-se a elasticidade média da procura

$$El_{\text{média}}(Q; p_0; 1{,}01 p_0) = \frac{Q(1{,}01 p_0) - Q(p_0)}{Q(p_0)} \times 100,$$

que representa a variação percentual na quantidade procurada quando o preço aumenta 1%, *ceteris paribus*, i.e., mantendo-se constantes todos os restantes fatores que influenciam a procura.
De maneira mais geral, se o preço aumentar de r%, a elasticidade

$$El_{\text{média}}\left(Q; p_0; \left(1+\frac{r}{100}\right)p_0\right) = \frac{Q\left(\left(1+\frac{r}{100}\right)p_0\right) - Q(p_0)}{Q(p_0)} \times \frac{100}{r}$$

é igual à variação percentual da procura por cada ponto percentual do aumento do preço.

Quando a variável p do preço é contínua e a função procura é diferenciável em p_0, pode definir-se a «elasticidade instantânea da procura em p_0» passando ao limite $\Delta p \to 0$ na elasticidade média:

$$El_p Q(p_0) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{p_0}{Q(p_0)} \times \frac{Q(p_0 + \Delta p_0) - Q(p_0)}{\Delta p} = \frac{p_0}{Q(p_0)} \times Q'(p_0).$$

Em particular, se $\Delta p_0 \ll 1$, tem-se $El_p P(p_0) \approx El_{\text{média}}(Q; p_0; p_0 + \Delta p)$.

Podemos definir, de forma mais geral, a elasticidade de uma qualquer função diferenciável:

Definição 3.3.1: Elasticidade

Seja $f : x \in D \to f(x)$ uma função diferenciável num ponto $x_0 \in D$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Define-se então a «elasticidade instantânea de f em x_0» por

$$El[f](x_0) = \frac{x_0}{f(x_0)} \times f'(x_0).$$

Observação 3.3.1. *Nas aplicações, é frequente que f seja uma função definida em $\mathbb{R}^+$, positiva e diferenciável. Nesse caso, a elasticidade de f pode definir-se à custa do quociente de derivadas logarítmicas:*

$$El[f](x_0) = \frac{(\ln f)'(x_0)}{(\ln x)'(x_0)}.$$

Aplicação 7: Elasticidade da procura

Exercício

Suponha que a procura de um determinado produto, cujo preço unitário é p *u.m.*, é dada por

$$Q(p) = \frac{p^2}{20} - 10p + 200 \textit{ unidades},$$

e que o preço unitário atual é de $p_0 = 10$ *u.m.*

(a) Calcule a variação percentual da procura face a um aumento de 1% do preço.
(b) Calcule a elasticidade da função procura e comente.

Resolução

(a) A variação percentual é de

$$El_{\text{média}}(Q; p_0 = 10; 0,1 p_0 = 10,1) = \frac{Q(10,1) - Q(10)}{Q(10)} \times 100$$

$$= \frac{\left(\frac{10,1^2}{20} - 10 \times 10,1 + 200\right) - \left(\frac{10^2}{20} - 10 \times 10 + 200\right)}{\frac{10^2}{20} - 100 + 200} \times 100 \approx -0,86.$$

Conclui-se que se o preço $p_0 = 10$ *u.m.* aumentar em 1%, a procura diminui de 0,86%.

(b) A elasticidade da função procura no ponto $p_0 = 10$ é

$$El_p Q(10) = \frac{10}{Q(10)} \times Q'(10) = \frac{10}{105} \times (-9) \approx -0,86.$$

Trata-se de uma boa aproximação da variação percentual exata já que, como $\Delta p = 0,01 \ll 1$, $El_pQ(p) \approx El.m.(Q; p_0; 1,01p_0)$.

Aplicação 8: Elasticidade da procura

A receita $R(p)$ obtida com a venda das $Q(p)$ unidades procuradas é $R(p) = pQ(p)$. A elasticidade de R relativamente ao preço p é então dada por

$$El_pR(p) = \frac{p}{R(p)}(pQ)'(p) = \frac{1}{Q(p)}(Q(p) + pQ'(p)) = 1 + El_pQ(p).$$

Terminamos esta secção com algumas propriedades gerais da elasticidade:

Proposição 3.3.1 Seja $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $b \in D_g$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a = g(b) \in D_f$. Então, se $b \in D'_{f\circ g}$, e se $a \neq 0$ e $f(a) \neq 0$,

$$El[f \circ g](b) = El[f] \circ g(b) \times El[g](b).$$

Prova. *De acordo com a definição de elasticidade e pelo teorema da derivação da função composta, se $b \in D'_{f\circ g}$, $a \neq 0$ e $f(a) \neq 0$,*

$$\begin{aligned} El[f \circ g](b) &= \frac{b}{(f \circ g)(b)}(f \circ g)'(b) = \frac{b}{f(g(b))} f'(g(b))g'(b) \\ &= \frac{g(b)}{f(g(b))} f'(g(b)) \frac{b}{g(b)} g'(b) = El[f](g(b))El[g](b). \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2 Seja f uma função bijetiva, diferenciável num ponto $a \neq 0$, e tal que $f'(a) \neq 0$. Então

$$El[f^{-1}](b) = \frac{1}{El[f](a)},$$

onde $b = f(a)$.

Prova. *De acordo com a definição de elasticidade e com o teorema de derivação da função inversa,*

$$El[f^{-1}](b) = \frac{b}{f^{-1}(b)}(f^{-1})'(b) = \frac{f(a)}{a}\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{El[f](a)}.$$

A elasticidade goza de propriedades de morfismo multiplicativo-aditivo semelhantes às do logaritmo natural:

Teorema 3.3.1: Propriedades da elasticidade

Sejam f e g diferenciáveis e que não se anulam nos respetivos domínios. Então

- $El[fg] = El[f] + El[g]$;
- $El\left[\frac{1}{f}\right] = -El[f]$;
- $El\left[\frac{f}{g}\right] = El[f] - El[g]$.

Prova. *Para x no domínio de $El[f]$ e de $El[g]$,*

1. *Produto*
$$El[fg](x) = x\frac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = x\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = El[f](x)+El[g](x);$$
2. *Inversa*
$$El\left[\frac{1}{f}\right](x) = x\times\frac{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)}{\frac{1}{f(x)}} = -\frac{f'(x)}{\frac{1}{f(x)}f^2(x)} = -El[f](x);$$
3. *Quociente*
$$El\left[\frac{f}{g}\right](x) = El\left[f\times\frac{1}{g}\right](x) = El[f](x)+El\left[\frac{1}{g}\right](x) = El[f](x)-El[g](x).$$

3.4 Derivadas laterais

Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin(x) & \text{se} \quad x\geq 0 \\ x^3-2x & \text{se} \quad x<0. \end{cases}$$

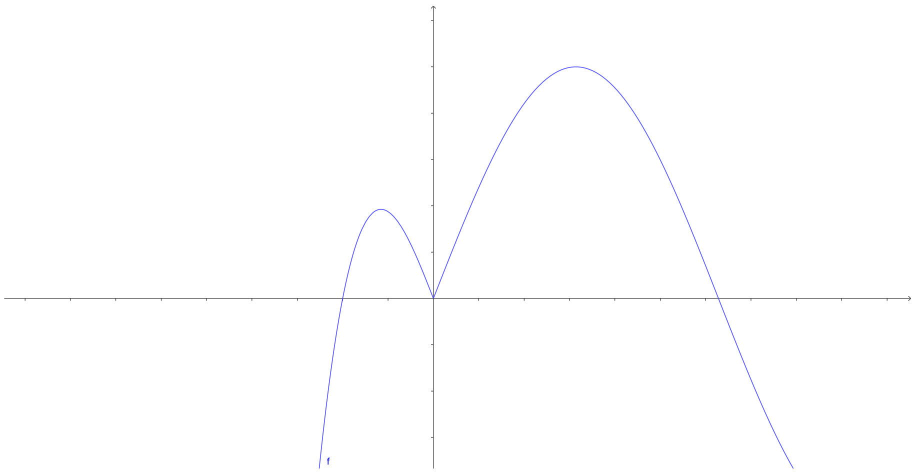


Figura 3.4: Gráfico da função f

Para funções que, tal como a função f, estão definidas por ramos, é interessante definir o conceito de «derivada lateral»:

Definição 3.4.1: Derivadas laterais

Seja f uma função e a um ponto do respetivo domínio. Se existem, os limites

$$f'_d(a) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{e} \quad f'_e(a) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

dizem-se, respetivamente, a «derivada lateral direita» e a «derivada lateral esquerda» de f no ponto a.

Exemplo 3.4.1 Retomando o exemplo acima, tem-se

$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2\sin(h)-2\sin(0)}{h} = 2$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^3-2h}{h} = -2.$$

Estes valores correspondem aos declives das semirretas tangentes ao gráfico da função f restrita, respetivamente, aos intervalos $[0;+\infty[$ e $]-\infty;0]$.

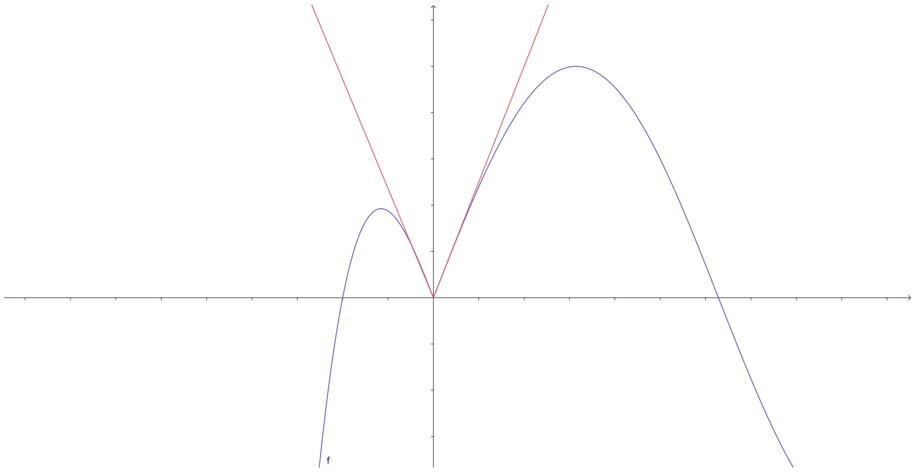


Figura 3.5: Semirretas tangentes ao gráfico de f

O seguinte resultado decorre de forma imediata da definição de derivada:

Proposição 3.4.1 Seja f uma função e a um ponto do respetivo domínio. Então, a função f é diferenciável no ponto a se e só se $f'_d(a) = f'_e(a)$. Nesse caso, tem-se

$$f'(a) = f'_d(a) = f'_e(a).$$

Contudo, para mostrar que uma dada função é diferenciável num ponto de mudança de ramo, o cálculo dos dois limites que definem as derivadas laterais pode tornar-se extremamente fastidioso. Este problema pode ser resolvido graças à seguinte propriedade, que permite efetuar esse cálculo de forma mais expedita, recorrendo às regras de derivação que estudámos nos capítulos anteriores:

Proposição 3.4.2 Seja f uma função contínua num intervalo da forma $[a;a+h]$ e diferenciável em $]a;a+h[$, para algum $h>0$. Então, se o limite $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existir, existe também $f'_d(a)$, e tem-se

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

De forma análoga,

$$f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$$

quando este último limite existe.

Prova. *Trata-se de uma aplicação imediata do Teorema de Lagrange. Com efeito, segundo este resultado, existe $c = c(h) \in]a;a+h[$ tal que*

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(c(h)).$$

Como $a < c(h) < a+h$, pelo Teorema das Funções Enquadradas, $\lim\limits_{h\to 0^+} c(h) = a^+$, e, por composição de limites,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

A existência da derivada lateral esquerda anunciada no Teorema decorre de um cálculo similar.

Desta propriedade pode deduzir-se o seguinte resultado, muito útil na prática para estudar a diferenciabilidade de funções em pontos de mudança de ramo:

Teorema 3.4.1: Limites da função derivada e diferenciabilidade

Seja f uma função diferenciável em intervalos da forma $]a;a+\varepsilon[$ e $]a-\varepsilon;a[$, para algum $\varepsilon>0$.
Então, se f for contínua em a,

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x) \Rightarrow f \text{ é diferenciável em } a,$$

e, se for o caso, tem-se

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x).$$

Prova. *Basta observar que como f é contínua em a e diferenciável em $]a;a+h[$, existe $\varepsilon>0$ tal que f é contínua em $[a;a+\varepsilon]$ e diferenciável em $]a;a+\varepsilon[$. Pela Proposição 3.4.2,*

$$f'_d(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Da mesma forma,

$$f'_e(a) = \lim_{x\to a^-} f'(x).$$

Assim, $f'_d(a) = f'_e(a)$ e f é diferenciável em a, sendo $f'(a)$ igual às derivadas laterais.

Exemplo 3.4.2 Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)e^x & \text{se} \quad x\geq 0 \\ x & \text{se} \quad x<0. \end{cases}$$

Tem-se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$, pelo que f é contínua em $x=0$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]-\infty;0[$ e, para todo o $x<0$, $f'(x)=1$: $f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$.
Da mesma forma, $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x(\sin(x)+\cos(x)) = 1$.
Assim, f é diferenciável em $x=0$ e $f'(0)=1$.

Terminamos esta secção com duas observações importantes:

Observação 3.4.1. *Para aplicar o Teorema 3.4.3, a hipótese de continuidade de f no ponto a é fundamental: é essa condição que nos permitiu aplicar o Teorema de Lagrange na respetiva demonstração. Se tomarmos a função definida em $\mathbb{R}$ por*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{se} \quad x\geq 0 \\ x & \textit{se} \quad x<0, \end{cases}$$

é imediato observar que $\lim_{h\to 0^+} f'(x) = \lim_{h\to 0^-} f'(x) = 1$.
Contudo, f não é diferenciável em $x=0$, uma vez não é sequer contínua.

Observação 3.4.2. *A implicação do Teorema 5.4.3 não é uma equivalência, como se pode verificar no exemplo seguinte. Tomando*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) \; se & x \neq 0 \\ 0 \quad se & x = 0, \end{cases}$$

tem-se, $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) = 0.$
Contudo, para $x \neq 0$*,*

$$g'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

e os limites laterais de g' *em* 0 *não existem.*

3.5 Exercícios do Capítulo 3

Exercício 3.5.1 Aplique, sempre que possível, o Teorema de Rolle ou o Teorema de Lagrange às funções abaixo nos intervalos considerados.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, no intervalo $[1;2]$.

(b) $g(x) = |x-1|$, no intervalo $[0;2]$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$, no intervalo $\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

(d) $i(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & se \; x \leq -1 \\ x^3 + 1 & se \; x > -1 \end{cases}$,no intervalo $[-3;0]$

Exercício 3.5.2 Dados números reais a e b, considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } \; x < 2 \\ 5\sin(x-2) - 4\cos(4-2x) & \text{se } \; x \geq 2 \end{cases}.$$

Determine a e b por forma a poder aplicar-se o Teorema de Lagrange à função f em qualquer intervalo.

Exercício 3.5.3 Determine os intervalos de monotonia das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $x^2 + 3x - 1$

(b) $x^3 - 9x + 3$

(c) $x^3 + 5x - 2$

(d) $(x^2 - 25)^5$

(e) $x^3(8-x)^6$

(f) $\dfrac{2}{x^4 - 2}$

(g) $x^5 - 10x^4 + 4$

(h) $2x - \dfrac{1}{x}$

(i) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$

(j) $x - \sin(2x)$

(k) $x + \cos(x)$

(l) $x - \arctan(2x)$

(m) $\arctan(x^2)$

Exercício 3.5.4 Forneça uma expressão para a derivada logarítmica das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\dfrac{2+x^2}{2-x}$

(b) $\dfrac{1-\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}{1+3x^4}$

(c) $\dfrac{x}{1-x^2}$

(d) $\dfrac{3x^2+x^3-9x+4}{x-1}$

(e) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(f) $\dfrac{ax^4-bx}{\sqrt{x^2+1}}$, $a,b\in\mathbb{R}$

(g) $x^3\ln(x)$

(h) $\dfrac{x^5}{\arctan(x)}$

(i) $\dfrac{x}{1-\ln(x)}$

(j) $\dfrac{e^{-x}-x}{xe^x}$

(k) $x\arcsin^3(x)$

(l) $\left(x-\ln(\frac{1}{x})\right)^6\sqrt{\arccos(x)}$

Exercício 3.5.5 Calcule a elasticidade das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) e^x

(b) a^x, com $a>0$

(c) $\ln(x)$

(d) $\log_a(x)$, com $a>0$

(e) x^3

(f) $\sin(x)$

(g) $\cos(x)$

(h) $\tan(x)$

(i) $\arcsin(x)$

(j) $\arccos(x)$

(k) $\arctan(x)$

(l) e^{x^2}

(m) $\ln(\sin(x)+2\sqrt{x})$

(n) $4^{\arcsin(x)}$

(o) $\log_{\frac{1}{2}}(3x^3+x)$

(p) $\ln^3\left(\dfrac{1}{x}+x^5\right)$

(q) $\sin(x^3-x+2)$

(r) $\cos(e^{x^2}+x)$

(s) $\tan(\sqrt[3]{x^2})$

(t) $\arcsin(2x+2)^2$

(u) $\arctan(e^x)$

Exercício 3.5.6 Estude a diferenciabilidade das seguintes funções, nos pontos indicados:

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x\neq 0;\\ 1 & \text{se } x=0;\end{cases}$, no ponto $x=0$

(b) $g(x)=\begin{cases}2x^3-x-1 & \text{se } x\geq 1\\ 5x-5 & \text{se } x<1\end{cases}$, no ponto $x=1$;

(c) $j(x)=\begin{cases}2+\sqrt{x} & \text{se } x\geq 1\\ \dfrac{x+5}{2} & \text{se } x<1\end{cases}$, no ponto $x=1$;

(d) $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1 & \text{se } x\geq 2\\ \dfrac{6x+6}{x^2+2} & \text{se } x<2.\end{cases}$, no ponto $x=2$.

Exercício 3.5.7 Sejam f e g funções tais que $f(3) = \frac{1}{5}$, $f'(3) = \frac{2}{e}$, $g(2) = 3$ e $(f \circ g)'(2) = -\pi$. Calcule $El[g](2)$ e $El[f \circ g](2)$.

Exercício 3.5.8 Mostre que as funções constantes têm elasticidade nula.

Exercício 3.5.9 Seja f uma função diferenciável que não se anula e $A \neq 0$. Mostre que

$$El[Af] = El[f].$$

Exercício 3.5.10 Seja f uma função diferenciável que não se anula e tal que $\forall x \in D_f, f(x) + A \neq 0$. Mostre que

$$El[A+f] = \frac{f}{A+f} El[f].$$

Exercício 3.5.11 Sejam f e g funções diferenciáveis que não se anulam. Mostre que

(a) se $\forall x \in D_{f+g}, (f+g)(x) \neq 0$,

$$El[f+g] = \frac{fEl[f] + gEl[g]}{f+g}.$$

(b) se $\forall x \in D_{f-g}, (f-g)(x) \neq 0$,

$$El[f-g] = \frac{fEl[f] - gEl[g]}{f-g}.$$

Exercício 3.5.12 Seja a função f definida por $f(x) = ax^b$, em que a e b são constantes. Mostre que a elasticidade de f é constante e explicite-a.

Exercício 3.5.13 Seja f uma função positiva e diferenciável e $p \in \mathbb{R}$. Mostre que

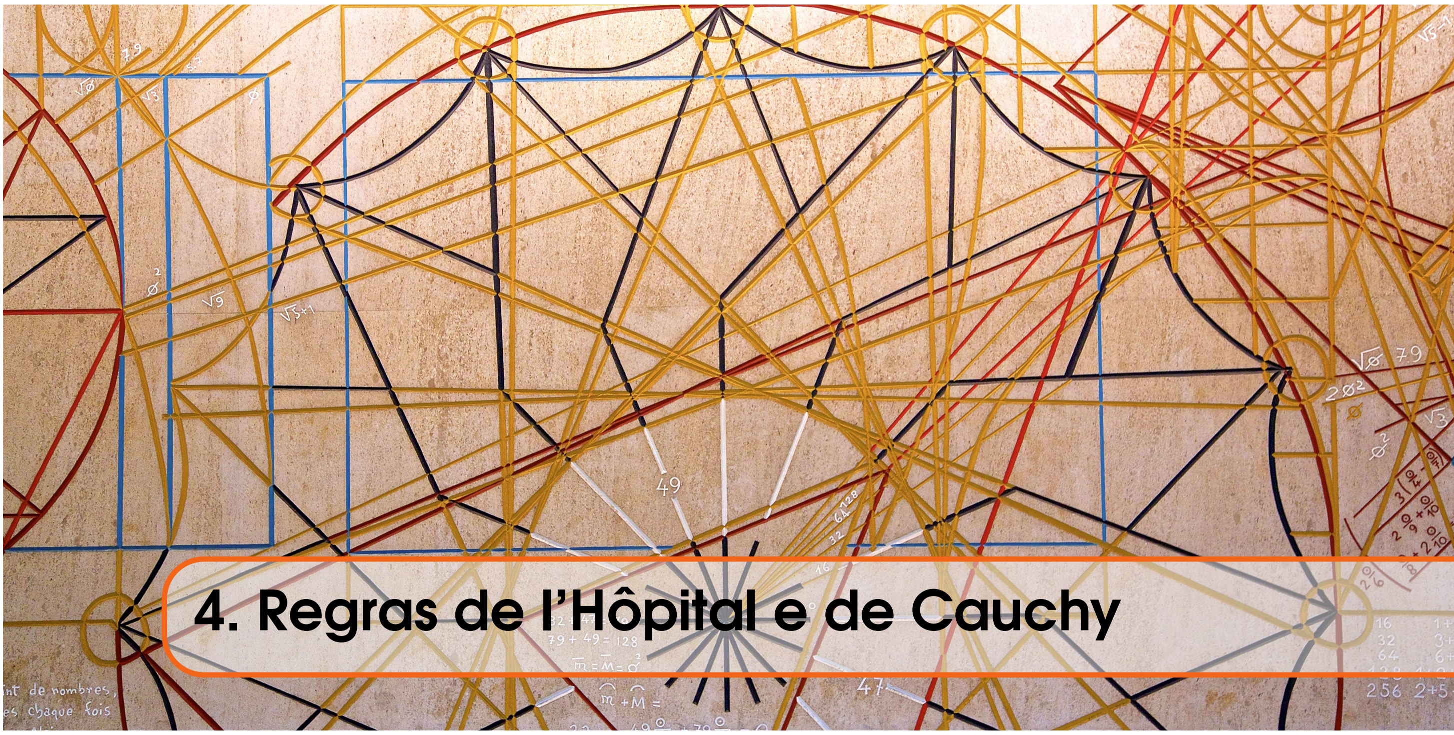
$$El[f^p] = pEl[f].$$

Exercício 3.5.14 Demonstre as desigualdades seguintes: (Sugestão: utilize o Teorema de Lagrange.)

(a) $|\sin(x)| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|\cos(x) - 1| \leq |x|$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\arctan(x) \leq \frac{x}{10}$, para todo o $x \geq 3$.



4. Regras de l'Hôpital e de Cauchy

4.1 Regra de l'Hôpital

Consideremos duas funções f e g contínuas num ponto $a \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = g(a) = 0$. O limite

$$l = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

apresenta aqui, como vimos, uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. A regra dita de l'Hôpital constitui um resultado simples que permite calcular l na situação em que f e g, para além de contínuas, são diferenciáveis em a e se tem $g'(a) \neq 0$:

Teorema 4.1.1: Regra de l'Hôpital

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $a \in \mathbb{R}$ com $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Prova. *Comecemos por observar que, como $g'(a) \neq 0$, existe uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a tal que, para todo o $x \in \mathscr{V} \setminus \{a\}$, $g(x) \neq g(a) = 0$. Assim,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Exemplo 4.1.1 Consideremos o limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{\sin(3x)}$ (indeterminação $\frac{0}{0}$).
Tomando as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ pelas expressões $f(x) = \arctan(x)$ e $g(x) = \sin(3x)$,

tem-se $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $g'(x) = 3\cos(3x)$.
Pela regra de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\sin(3x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{3}.$$

Num certo sentido, a regra de L'Hôpital afirma que para se calcular o limite do quociente entre duas funções, se pode substituir cada uma delas pela função afim que define a respetiva reta tangente no ponto de abcissa a:

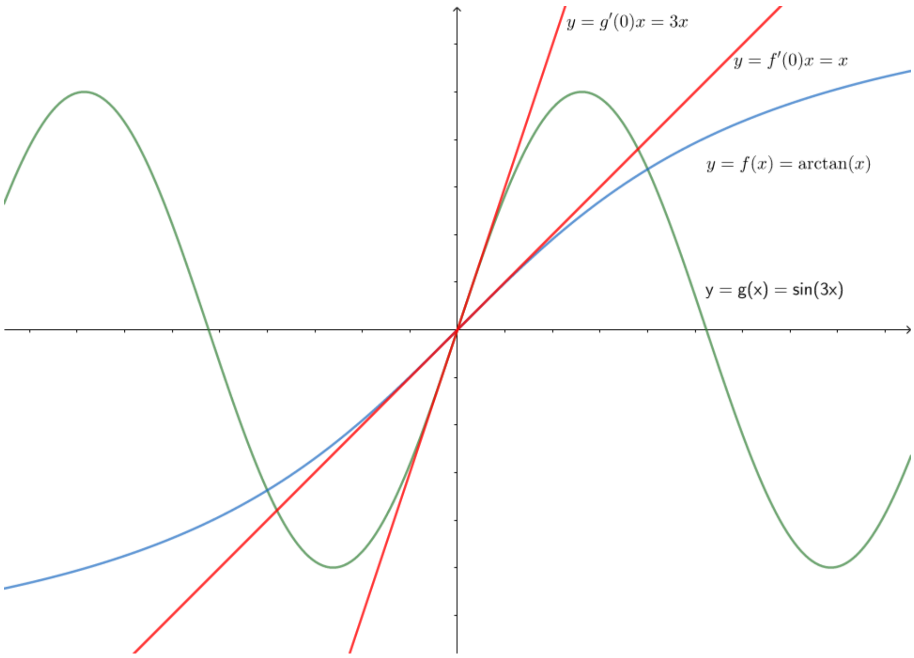


Figura 4.1: Ilustração da igualdade $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{\sin(3x)} = \dfrac{f'(0)x}{g'(0)x} = \dfrac{1}{3}$.

4.2 Regra de Cauchy

Ainda que se trate de uma propriedade muito útil, as hipóteses de aplicação da regra de l'Hôpital são algo limitativas. Assim, é comum complementar-se este processo para o cálculo de limites com um outro, dito "regra de Cauchy", que permite levantar indeterminações em pontos em que f e g não são diferenciáveis (ou não estão sequer definidas), ou mesmo quando $x \to \pm\infty$:

Teorema 4.2.1: Regra de Cauchy

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num intervalo aberto I e a uma das extremidades desse intervalo ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$).
Suponhamos que

- $\forall x \in I,\ g'(x) \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \quad$ ou $\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$;
- o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Então existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e tem-se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Antes de demonstrarmos este importante resultado vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.2.1 Crescimento logarítmico vs. linear vs. exponencial
Consideremos as funções f e g definidas em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x$. Aplicando a regra de Cauchy ($a = +\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Da mesma forma facilmente se obtém que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Exemplo 4.2.2 Estudo do limite $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.
Comecemos por observar que para $x > 0$, $x^x = e^{x\ln x}$. Assim, o problema resume-se ao cálculo do limite $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)$.
Tendo em vista a aplicação da Regra de Cauchy, escrevemos este produto na forma de um quociente:

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

As funções f e g definidas por $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ são diferenciáveis no intervalo $]0;+\infty[$ e tem-se $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1.$$

A regra de Cauchy admite o seguinte corolário imediato, correspondente à respetiva aplicação à esquerda e à direita do ponto a:

Corolário 4.2.1 — Corolário da regra de Cauchy. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto interior de um intervalo I e f e g diferenciáveis em $I \setminus \{a\}$. Se

- $\forall x \in I \setminus \{a\}, g'(x) \neq 0$;
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$;
- o limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe,

então existe o limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tem-se $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplo 4.2.3 Estudo do limite $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{(x-1)^3}$
Aqui, tomando $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = (x-1)^3$, colocamo-nos nas condições de aplicabilidade do corolário da regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{3(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Concluímos esta secção com a prova da Regra de Cauchy. Necessitamos previamente de um lema conhecido como ≪Teorema do valor médio de Cauchy≫:

Proposição 4.2.2 — Teorema do valor médio de Cauchy. Sejam f e g funções contínuas em $[a;b]$ e diferenciáveis em $]a;b[$, com $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in]a;b[$. Então, existe $c \in]a;b[$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Observação 4.2.1. *Observando que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}},$$

este resultado estabelece que o quociente entre as taxas de variação médias de duas funções num dado intervalo coincide com o quociente das taxas de variação instantâneas em pelo menos um ponto desse mesmo intervalo.
Note-se igualmente que para $g(x) = x$ se obtém o enunciado do Teorema de Lagrange.

Prova. *Começamos por observar que $g(b) - g(a) \neq 0$. Caso contrário, pelo Teorema de Rolle, existiria $x \in]a;b[$ tal que $g'(x) = 0$, o que contraria as hipóteses.*
A demonstração segue então as linhas da prova do Teorema de Lagrange, substituindo-se $b-a$ por $g(b)-g(a)$ e x por $g(x)$. De facto, seja h a função definida em $[a;b]$ por

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x):$$

$$h(b) - h(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(b)-g(a)) = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]a;b[$ tal que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0,$$

de onde se conclui a igualdade pretendida.

Estamos finalmente em condições de demonstrar a regra de Cauchy:

Prova. *Seja $I =]a;b[$, isto é, situemo-nos no caso em que a é o extremo inferior do intervalo I. A demonstração no caso em que $I =]b;a[$ é em tudo análoga. Por outro lado, vamos supor que o limite $l = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ é finito. Caso contrário, se $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, bastará inverter os papeis de f e g, obtendo-se em particular que $\lim_{x\to a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$.*
Dados $x, y \in]a;b[$, $x < y$, existe $c \in]x;y[$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Tomando y suficientemente próximo de a,

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Caso 1: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$**.**
Passando ao limite $x \to a^+$ na desigualdade (4.1), obtém-se que para y suficientemente próximo de a se tem

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - l\right| < \varepsilon,$$

pelo que, por definição, $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Caso 2: $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$**.**
Da desigualdade (4.1), dividindo ambos os termos da fração por $g(x)$,

$$(l-\varepsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} < (l+\varepsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

Ignoramos, para já se o limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Contudo, passando ao limite superior e inferior na desigualdade acima,

$$l-\varepsilon < \liminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} < l+\varepsilon \quad e \quad l-\varepsilon < \limsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} < l+\varepsilon.$$

Finalmente, da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$ resulta que

$$l = \liminf_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \limsup_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)},$$

pelo que $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

4.3 Exercícios do Capítulo 4

Exercício 4.3.1 Determine o domínio e uma expressão designatória da função derivada de:

$$(a)\ \ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x\arctan(x)}{e^{2x}-1} & \text{se}\ \ x\neq 0\\[2ex] 0 & \text{se}\ \ x=0\end{cases}$$

$$(b)\ \ h(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se}\ \ x\neq 0\\[2ex] 0 & \text{se}\ \ x=0\end{cases}$$

$$(c)\ \ i(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\ln(\sqrt{x})} & \text{se}\ \ x>0, x\neq 1\\[2ex] 4 & \text{se}\ \ x=1\end{cases}$$

Exercício 4.3.2 Calcule os limites:

$(a)\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\cos(x)}}{\sin(x)-\cos(x)}$

$(b)\ \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(ex)-1}{\sin(3x)}$

$(c)\ \displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{5y}{\tan(2y)}$

$(d)\ \displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\ln(2x-5)}{x^2-9}$

$(e)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)},\ a,b\in\mathbb{R}$

$(f)\ \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\arccos(\frac{\pi}{2}-t)}{\arctan(t)}$

$(g)\ \displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos(\alpha y)}{1-\cos(\beta y)},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$(h)\ \displaystyle\lim_{r\to 1}\frac{\sqrt[5]{r}-1}{\sqrt[3]{r}-1}$

$(i)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(2x)}{\sin(5x)}$

$(j)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

$(k)\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(3x)}{\pi-2x}$

$(l)\ \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(6t)}{\ln(1+3t^2)}$

$(m)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(3x))}{\ln(\tan(8x))}$

$(n)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x},\ \text{com}\ n\in\mathbb{N}$

$(o)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln(x+1)}{x\ln(x)}$

$(p)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+e^{2x})}{x^2}$

$(q)\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x^2-1)}{\ln(x^2+3x-4)}$

$(r)\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\tan(3x))}{\ln(\tan(5x))}$

Exercício 4.3.3 Calcule os limites

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{xe^{3x}}\right)$

(c) $\lim\limits_{y\to +\infty} y(2\arctan(3y)-\pi)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sqrt{4x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)\right)^{\frac{x}{4}}$

(f) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\tan(3x)\right)^{\frac{1}{x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)^{\frac{1}{x^2}}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin(2x)\right)^{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$

(l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

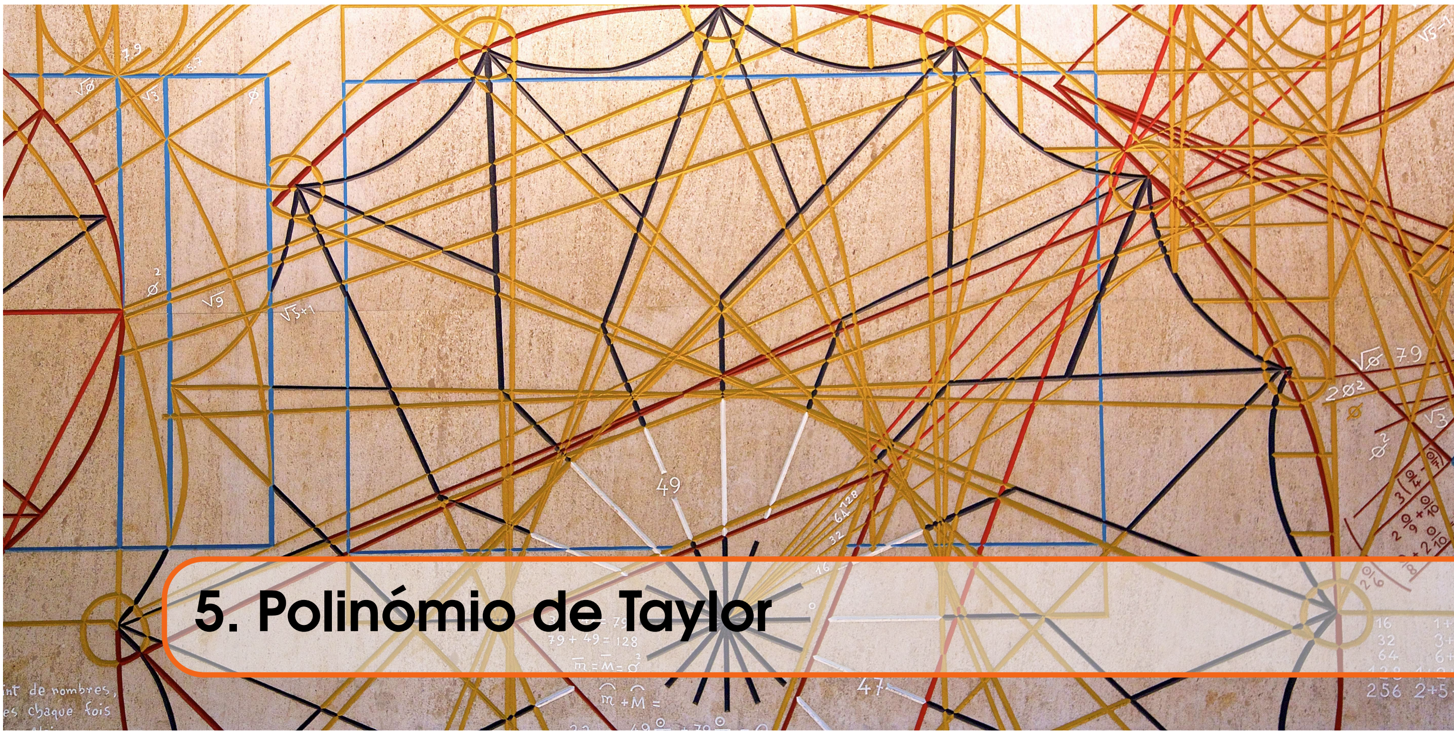
Exercício 4.3.4 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x<0\\[2ex] \alpha & se\ x=0\\[2ex] \dfrac{\pi x}{\ln(1+x)^{\beta}} & se\ x>0\end{cases},$$

com $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(a) Determine os valores dos parâmetros α e β para os quais a função é diferenciável em $\mathbb{R}$.

(b) Defina a função derivada de f para os valores de α e de β determinados na alínea anterior.



5. Polinómio de Taylor

5.1 Derivadas de ordem superior

Como vimos nas secções anteriores, a derivada f' mede, pontualmente, a taxa instantânea de variação de f. Por sua vez, o conhecimento da taxa de variação de f', quando existe, fornecerá mais informações sobre a função inicial f. Assim, quando possível, é interessante definir-se a derivada da derivada de f, a função $f'' := (f')'$, a que se dá o nome de «derivada segunda de f». Sucessivamente, podemos também definir a «derivada terceira de f» ($f''' := (f'')'$), a «derivada quarta de f», ($f'''' := (f''')'$)...etc.

Dado um ponto material P que se desloca num eixo e que ocupa, no instante t, a posição $d(t)$, sabemos já que a velocidade de P é definida por $v(t) = d'(t)$. Por sua vez, à derivada de v (isto é, à derivada segunda da posição) dá-se o nome de "aceleração"de P: $a(t) = v'(t) = d''(t)$. Por outras palavras, a aceleração mede a variação da velocidade. Na verdade, o termo "aceleração"é utilizado em muitos contextos, mas sempre com este sentido de uma segunda variação. Dizer, por exemplo, ainda que de forma algo coloquial, que a "economia está a acelerar", significa que a economia está a "crescer cada vez mais", ou seja, que está a aumentar a velocidade com que a economia está a crescer.

Definição 5.1.1: Segunda derivada

Seja f uma função diferenciável de domínio D e f' a respetiva função derivada, de domínio $D_1 \subset D$. Se f' for diferenciável em $a \in D_1$ diz-se que «f é duas vezes diferenciável em a» e denota-se por $f''(a)$ (ou por $f^{(2)}(a)$) a derivada de f' no ponto a: $f''(a) := (f')'(a)$.
Fica assim definida a função «segunda derivada de f», f'', de domínio

$$D_2 = \{x \in D_1 \,:\, f' \text{ é diferenciável em } x\} \subset D_1.$$

Mais geralmente, podemos definir por indução todas as derivadas de ordem superior de f: para $n \in \mathbb{N}$, supondo já definida a derivada de f de ordem n, a função $f^{(n)}$ de domínio D_n, seja

$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ a derivada de f de ordem $n+1$, de domínio

$$D_{n+1} = \{x \in D_n : f^{(n)} \text{ é diferenciável em } x\} \subset D_n.$$

Se, para um dado ponto $a \in D$, $f^{(k)}(a)$ existe para todo o $k \leq n$, f diz-se «n vezes diferenciável no ponto a». Se f for n vezes diferenciável em todos os pontos de um dado conjunto C, f diz-se «n vezes diferenciável em C». É igualmente usual utilizar a seguinte terminologia:

Definição 5.1.2: Funções de classe C^n

Seja $n \in \mathbb{N}$ e f uma função n vezes diferenciável num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$.
Se $f^{(n)}$ for contínua em Ω, f diz-se «de classe C^n em Ω» ($f \in C^n(\Omega)$). Se f admitir derivadas de qualquer ordem em Ω, f diz-se «de classe C^∞ em Ω» ($f \in C^\infty(\Omega)$).

Omitimos as provas das seguintes propriedades, que podem ser demonstradas de maneira imediata por indução:

Proposição 5.1.1 Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam f e g funções n vezes diferenciáveis num ponto a. Então $f+g$, $f-g$, $f \times g$ são n vezes diferenciáveis em a.
Se, para além disso, $g(a) \neq 0$, a função $\frac{f}{g}$ é também diferenciável n vezes em a.

Também, é fácil verificar que se f e g forem n vezes diferenciáveis num dado ponto a, se tem

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

e, para todo o $k \in \mathbb{R}$,

$$(kf)^{(n)}(a) = kf^{(n)}(a).$$

A seguida fórmula exprime a derivada de ordem n de um produto de duas funções em termos das respetivas derivadas:

Proposição 5.1.2 — Fórmula de Leibniz. Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam f e g duas funções n vezes diferenciáveis em a.
Então,

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a),$$

onde se usou a convenção $f^{(0)}(a) = f(a)$ (e $g^{(0)}(a) = g(a)$).

Prova. *Esta fórmula tem óbvias semelhanças com a fórmula dita do binómio de Newton. Vamos demonstrá-la também por indução.*
Para $n = 1$, a fórmula de Leibniz reduz-se ao caso já conhecido da derivada do produto:

$$(f \times g)^{(1)}(a) = f^{(1)}(a)g(a) + f(a)g^{(1)}(a).$$

Suponhamos agora que para um dado $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) g^{(k)}(a).$$

Derivando ambos os membros, obtém-se

$$(f \times g)^{(n+1)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(n-k)} \times g^{(k)})'(a),$$

ou ainda,

$$(f\times g)^{(n+1)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(a)g^{(k+1)}(a).$$

Da mudança de índice $k\to k+1$ no segundo somatório conclui-se que

$$\begin{aligned}(f\times g)^{(n+1)}(a)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)\\ &=\binom{n}{0}f^{(n+1-0)}(a)g^{(0)}(a)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)\\ &+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)+\binom{n+1}{n+1}f^{(0)}(a)g^{(n+1)}(a)\\ &=f^{(n+1)}(a)g(a)+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a)+f(a)g^{(n+1)}(a)\\ &=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(a)g^{(k)}(a),\end{aligned}$$

o que conclui a prova.

5.2 Polinómio de Taylor

Estudámos no início desta secção a função afim T que melhor aproxima, num certo sentido, uma dada função f na vizinhança de um ponto a do respetivo domínio. Quando uma tal função afim existe, apelidámos de «reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a;f(a))$» o gráfico de T.

Observando que T é uma função polinomial de grau 1, pretendemos nesta secção substitui-la por uma função polinomial de grau superior, com o intuito de obter localmente uma melhor aproximação de f.

Se f for $n\in\mathbb{N}$ vezes diferenciável no ponto a, uma candidata natural será uma função polinomial P que verifique, para todo o $k=0,\dots,n$,

$$P^{(k)}(a)=f^{(k)}(a).$$

Com efeito, as derivadas de f no ponto a contêm informação sobre o respetivo comportamento local: $f'(a)$ mede a variação de f, $f''(a)$ a variação da variação...etc. Assim, é expectável que uma função polinomial que partilhe com f o valor de todas estas derivadas se assemelhe significativamente a essa função na vizinhança de a.

Por outro lado, regressando à função afim T, vimos que necessariamente

$$T(a)=f(a),$$

e concluímos igualmente que o declive de uma tal reta é igual a $f'(a)$, ou seja, que

$$T'(a)=f'(a).$$

Assim, a introdução de um polinómio com as características acima expressas constitui, também deste ponto de vista, uma extensão natural da aproximação de f pela função afim T:

Definição 5.2.1: Polinómio de Taylor

Seja $n \in \mathbb{N}$, f uma função n vezes diferenciável num ponto $a \in D_f$ e P_n um polinómio de grau inferior ou igual a n. Se para todo o $k = 0, \ldots, n$

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),$$

P_n diz-se «polinómio de Taylor de ordem n de f centrado em a».

Observação 5.2.1. *Quando $a = 0$, é usual apelidar P_n de «polinómio de Maclaurin de ordem n de f».*

Tomemos, por exemplo, a função exponencial f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$.
A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0; f(0)) = (0; 1)$ tem por equação

$$y = T(x) = f(0) + xf'(0) = 1 + x.$$

O polinómio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ é polinómio de Maclaurin de f de ordem 2 se $P_2(0) = f(0)$, $P_2'(0) = f'(0)$ e $P_2''(0) = f''(0)$, ou seja, se $a_0 = a_1 = 1$ e $a_2 = \frac{1}{2}$. Obtivemos assim

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Na figura seguinte representámos, numa vizinhança de $a = 0$,
- O gráfico de f (de equação $y = e^x$);
- A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0; 1)$ (de equação $y = 1 + x$);
- O gráfico de P_2 (a parábola de equação $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$).

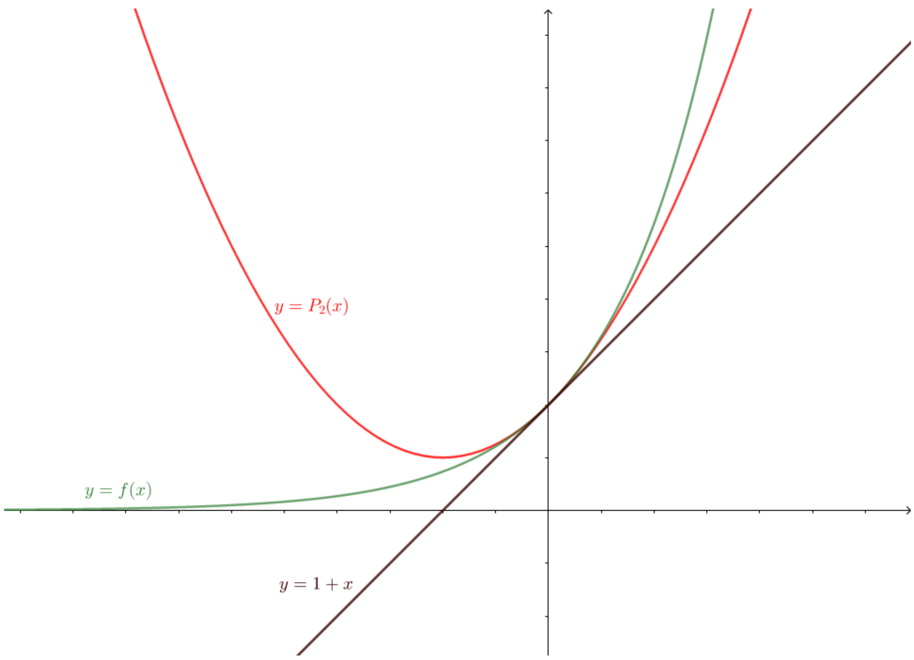


Figura 5.1

Da ilustração resulta de facto a ideia de que P_2 constitui uma melhor aproximação de f do que T. Mais adiante justificaremos rigorosamente este resultado.

A propriedade seguinte garante a existência e a unicidade do polinómio de Taylor:

Teorema 5.2.1: Expressão do polinómio de Taylor

Seja $n \in \mathbb{N}$ e f uma função n vezes diferenciável num ponto $a \in D_f$. Então o polinómio P_n definido por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

onde, para todo o $k = 0, \ldots, n$,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

é o (único) polinómio de Taylor de f de ordem n centrado em a.

Prova. *A família $p_j(x) = (x-a)^j$, $0 \leq j \leq n$, é uma base do espaço $\mathbb{R}_n[X]$ dos polinómios de grau inferior ou igual a n. Assim, um polinómio P deste espaço escreve-se em toda a generalidade como combinação linear dos polinómios p_j:*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x-a)^j,\ a_j \in \mathbb{R}.$$

É imediato verificar por indução que para todo o k se tem

$$P^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} a_j j!(x-a)^{j-k},$$

pelo que, tomando $x = a$, $P^{(k)}(a) = a_k k!$.
Assim, P é polinómio de Taylor de f de ordem n centrado em a se e só se para todo o k, $f^{(k)}(a) = a_k k!$, o que conclui a prova.

Foquemo-nos presentemente no estudo da qualidade da aproximação fornecida pelo polinómio de Taylor. O seguinte teorema fornece uma importante informação acerca do erro que se comete ao substituir-se f pelo respetivo polinómio de Taylor numa vizinhança de a:

Teorema 5.2.2: Fórmula de Taylor com resto de Peano de ordem n

Seja $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função n vezes diferenciável num intervalo aberto I e $a \in I$. Então, existe uma função $x \to \varepsilon(x)$ definida numa vizinhança $\mathcal{V}_a$ do ponto a tal que, para todo o $x \in \mathcal{V}_a$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(a)(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \text{ com } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Este resultado afirma que, sendo P_n o polinómio de Taylor de ordem n de f centrado em a, o resto $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ pode ser escrito na forma

$$R_n(x) = (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

É a esta forma particular do resto R_n que se chama, usualmente «resto de Peano», em homenagem ao matemático italiano do século XIX. Antes de passarmos à demonstração do teorema, comentemos um pouco o seu significado: $(x-a)^n$ tende para 0 quando x tende para a. A "velocidade" dessa convergência é tanto maior quanto n é grande, no sentido em que se $n_1 > n_2$, $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{n_1}}{(x-a)^{n_2}} = 0$.

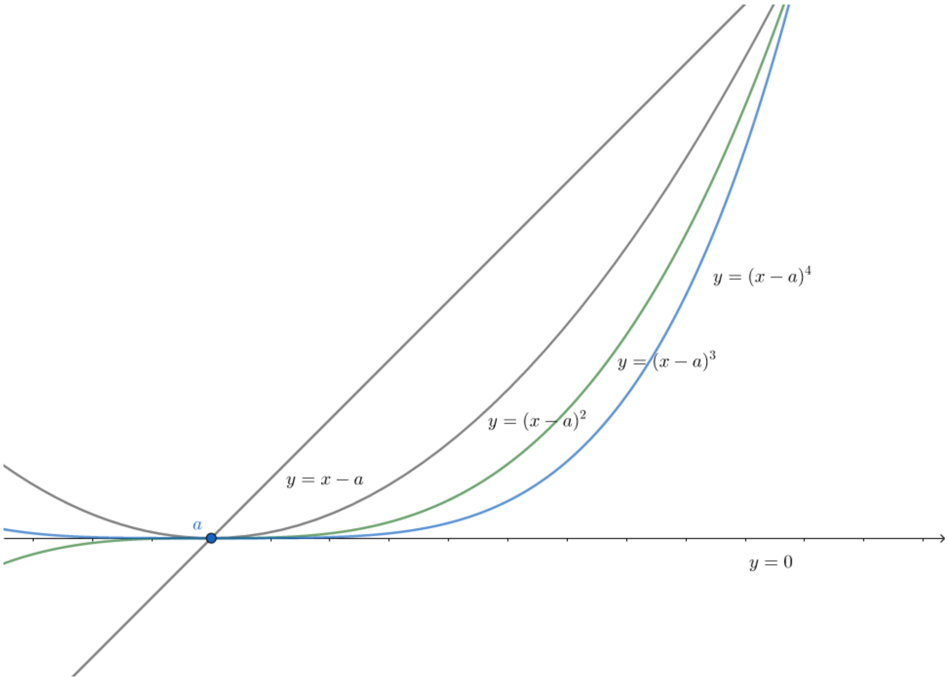


Figura 5.2: Velocidade de convergência para 0 do monómio $(x-a)^n$

Por outro lado, dada uma função ε de limite nulo, $(x-a)^n\varepsilon(x)$ tende para 0 a uma velocidade superior à de $(x-a)^n$. Assim, aquilo que o Teorema 5.2.2 garante é que a diferença $f(x)-P_n(x)$ tende para 0 a uma velocidade superior à de $(x-a)^n$.

Prova. *do Teorema* 5.2.2
Consideremos a função $g = f - P_n$ definida numa vizinhança de a. Por definição do polinómio de Taylor, tem-se, para $k = 0, 1, \dots, n$,

$$g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - P_n^{(k)}(a) = 0.$$

Aplicando n vezes consecutivas a regra de Cauchy ao limite $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n}$ *obtém-se*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to a} \frac{g^{(n)}(x)}{n!(x-a)^0} = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

e a prova fica concluída tomando $\varepsilon(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^n}$.

O resultado seguinte mostra que o polinómio de Taylor é o único polinómio de grau inferior ou igual a n para o qual $f - P_n$ tende para zero a velocidade superior à de $(x-a)^n$:

Proposição 5.2.1 Seja $n \in \mathbb{N}$, f uma função n vezes diferenciável num ponto a interior ao domínio de f e Q um polinómio de grau inferior a n tal que

$$f(x) = Q(x) + (x-a)^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

Então Q é o polinómio de Taylor de f de ordem n centrado em a.

Prova. *Seja P_n o polinómio de Taylor de f (de ordem n, centrado em a).*
Tem-se $f(x) = P_n(x) + (x-a)^n \tilde{\varepsilon}(x)$ onde a função $\tilde{\varepsilon}$ tem limite nulo em $x = a$.
Assim,

$$H(x) := Q(x) - P_n(x) = (x-a)^n(\varepsilon(x) - \tilde{\varepsilon}(x)). \tag{5.1}$$

Supondo que H é não nulo, a é raiz de H com multiplicidade $k \leq n$, isto é, $H(x) = (x-a)^k H_1(x)$, $H_1(a) \neq 0$. Substituindo na igualdade (5.1),

$$H_1(x) = (x-a)^{n-k}(\varepsilon(x) - \tilde{\varepsilon}(x)).$$

Tomando o limite quando x tende para a,

$$H_1(a) = \lim_{x \to a} H_1(x) = 0.$$

o que é absurdo. Assim, $H = 0$ e $Q = P_n$.

Este resultado mostra que o polinómio de Taylor de ordem n é aquele que, de entre todos os polinómios de ordem n, melhor aproxima a função f na vizinhança de a. Mais concretamente, poderíamos, a partir da definição alternativa de polinómio de Taylor, que generaliza a Definição 3.2.1:

Definição 5.2.2: Polinómio de Taylor - Definição alternativa

Seja f uma função n vezes diferenciável num ponto a do respetivo domínio. O polinómio de Taylor P_n é o (único) polinómio de grau inferior ou igual a n, com $P_n(a) = f(a)$, que verifica a seguinte propriedade:
Para todo o polinómio Q de grau inferior ou igual a n com $Q(a) = f(a)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_a$ de a tal que

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap D, |f(x) - P_n(x)| \leq |f(x) - Q(x)|.$$

Em particular, ao gráfico de P_2 poderíamos chamar ≪parábola tangente a f no ponto $(a; f(a))$≫, ao gráfico de P_3 ≪cúbica tangente a f no ponto $(a; f(a))$≫...etc.

Exemplo 5.2.1 Consideremos a função f definida em $]-1; +\infty[$ por $f(x) = \ln(1+x)$. Tem-se $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$ e $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$, de onde $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ e $f^{(3)}(0) = -2$. Assim, os polinómios de Maclaurin de f de ordens 1, 2 e 3 são dados respetivamente por $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ e $P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

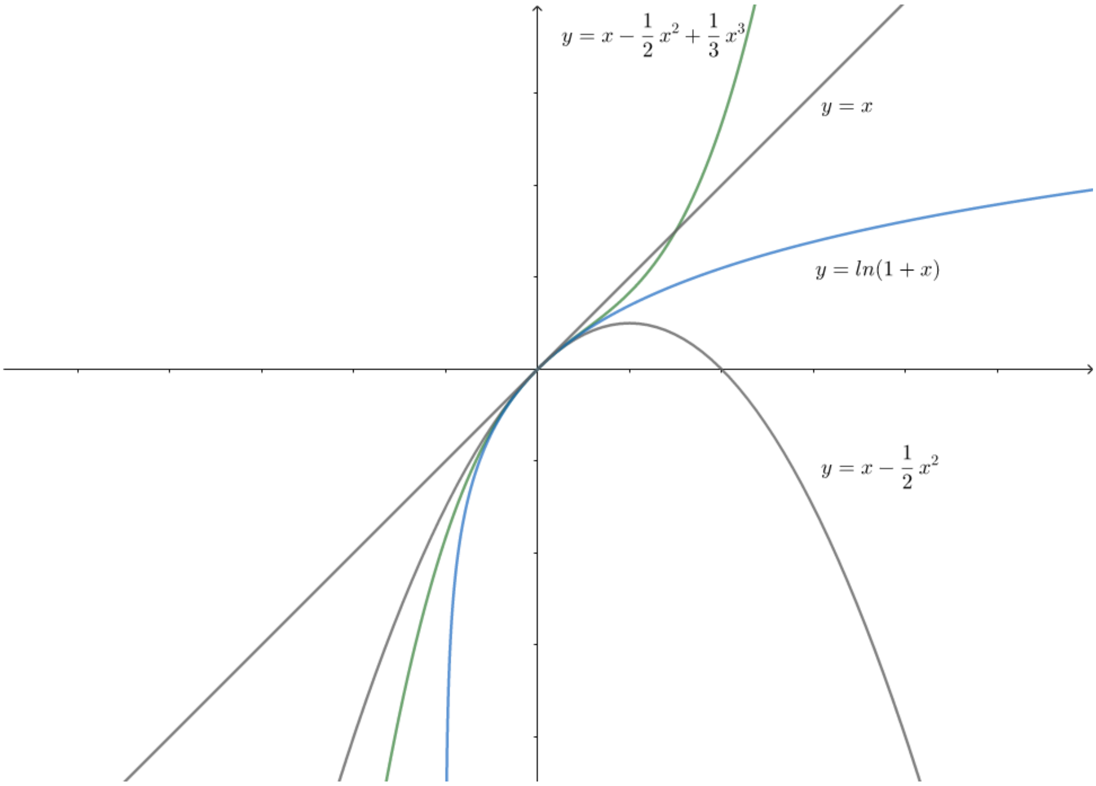


Figura 5.3: Reta, parábola e cúbica tangentes ao gráfico de f no ponto $(1;0)$

Será útil, de futuro, conhecer a fórmula de Taylor centrada em 0 para algumas funções usuais. Os resultados expressos podem ser facilmente verificados calculando as derivadas em 0 das diferentes funções.

- **Função exponencial**

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

- **Função seno**

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + x^{2n-1}\varepsilon(x),$$

$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

- **Função co-seno**

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x),$$

$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

- **Função logarítmica** $x \to \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$$

$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

- **Função racional** $x \to \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x),$$

$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

Esta última fórmula pode ser obtida sem cálculo de derivadas. Com efeito, pela fórmula da soma dos primeiros termos de uma progressão geométrica, sabemos que, para $x \neq 1$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n \frac{x}{1-x}.$$

Assim, com $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$, de limite nulo em 0, tem-se

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Observe-se também que a Proposição 5.2.1 garante que o polinómio $P(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ é o polinómio de Maclaurin de f de ordem n.

Suponhamos que $x > a$, por exemplo, e relembremos agora o Teorema de Lagrange: dada uma função contínua no intervalo $[a;x]$ e diferenciável em $]a;x[$, existe $c \in]a;x[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ou seja,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(c).$$

Observando que $P_0 = f(a)$ é o polinómio de Taylor de f de ordem 0 centrado em a, obtivemos uma nova expressão para o resto de ordem 0:

$$R_0(x) = f(x) - P_0(x) = (x-a) f'(c).$$

Esta nova forma do resto é na verdade mais geral, e é tradicionalmente conhecida como ≪Resto de Lagrange:≫

Teorema 5.2.3: Fórmula de Taylor com resto de Lagrange de ordem n

Seja $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função $n+1$ vezes diferenciável num intervalo aberto I e $a \in I$ (por exemplo $x > a$). Então, para todo o $x \in I \setminus \{a\}$, existe $c \in]a;x[$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Este teorema afirma que o resto de ordem n, $R_n = f - P_n$, pode escrever-se na forma

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

dito ≪Resto de Lagrange≫, o que generaliza a expressão mais acima obtida para o resto de ordem 0.

Prova. *Consideremos a função h definida por*

$$h(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - M(x-t)^{n+1},$$

onde a constante M é escolhida de tal forma que h se anule em $t = a$*, ou seja, M é tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + M(x-a)^{n+1}.$$

Para demonstrar o Teorema 5.2.3 *basta pois verificar a existência de* $c \in]a;x[$ *tal que* $M = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.
Uma vez que f é $n+1$ *vezes diferenciável no intervalo I, h é contínua em* $[a;x]$*, diferenciável em* $]a;x[$ *e tem-se*

$$\begin{aligned} h'(t) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} - \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \right) + M(n+1)(x-t)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + M(n+1)(x-t)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + M(n+1)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Observando ainda que $h(a) = h(x) = 0$*, o Teorema de Rolle garante a existência de* $c \in]a;x[$ *tal que* $h'(c) = 0$*, ou seja,*

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aplicação 9: Polinómio de Taylor e aplicações financeiras

Considere-se uma aplicação financeira com uma taxa de juro composto de $r\%$ ao ano. Designando por C_0 o capital inicial, o capital acumulado, decorridos n anos, é dado por

$$C(n) = C_0(1+r)^n.$$

Para um investidor é importante saber *a priori* em quantos anos o capital investido aumenta numa determinada proporção α. Esse número obtém-se resolvendo a equação $C(n) = \alpha C_0$, em ordem a n :

$$C(n) = \alpha C_0 \Leftrightarrow C_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \alpha C_0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \ln\alpha \Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \ln\alpha \Leftrightarrow n = \frac{\ln\alpha}{\ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

Para o caso da duplicação do investimento, ou seja $\alpha = 2$,

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{r}{100}\right)}.$$

Nesta situação, é prática comum a utilização de fórmulas simples que permitem calcular rapidamente uma aproximação razoável do número n. Essas regras podem ser obtidas com aproximações da função logaritmo.

Regra dos 70
O polinómio de Taylor de ordem 1 centrado em 0 da função f definida pela expressão $f(x) = \ln(1+x)$ é dado por

$$P_1(x) = f(0) + xf'(0) = \ln(1) + x\frac{1}{1} = x.$$

Se a taxa de juro r for apenas de alguns pontos percentuais, tem-se $\frac{r}{100} \ll 1$, pelo que se obtém uma aproximação de n substituindo o denominador pelo respetivo polinómio de Taylor e $\ln 2$ por $0,7$:

$$n \approx \frac{0,7}{\frac{r}{100}} = \frac{70}{r}.$$

Por exemplo, se a taxa de juro for de 5% ao ano, sabe-se que o investimento duplicará em aproximadamente 14 anos.

Regra dos 72
Quando o número 70 não é múltiplo de r, mas é múltiplo de r o número 72, é por vezes usada a «regra dos 72»: para facilitar o cálculo mental e obter-se uma estimativa rápida, substitui-se o número 70 pelo número 72:

$$n \approx \frac{72}{r}.$$

Se a taxa de juro for agora 3% ano, o resultado obtido com esta regra é de 24 anos (enquanto o número de anos dado pela «regra dos 70» seria de $23,3$.)

Note-se que os números naturais $1,2,3,4,5,6,7,,9$ e 10 são todos divisores de 70 ou de 72: assim, combinando estas duas regras, pode obter-se mentalmente uma estimativa rápida do tempo de duplicação do investimento para qualquer uma destas taxas de juro.

Regra dos $69,3$
Aqui, utiliza-se a aproximação mais precisa $\ln 2 \approx 0,693$, substituindo-se portanto o numerador por $69,3$:

$$n \approx \frac{0,693}{\frac{r}{100}} = \frac{69,3}{r}.$$

Regra E-M
A «regra E-M» recorre à aproximação dada pelo polinómio de Taylor de ordem 2 centrado em 0 da função f,

$$P_2(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) = x - \frac{x^2}{2},$$

utilizando-se também $\ln 2 \approx 0,693$. Assim,

$$n \approx \frac{0,693}{\frac{r}{100} - \frac{1}{2}(\frac{r}{100})^2} = \frac{0,693}{200r - r^2} \times 2 \times 100^2 = \frac{69,3}{r} \times \frac{200}{200-r}.$$

5.3 Aplicação à otimização local

O cálculo diferencial constitui um poderoso instrumento para localizar os extremantes locais de funções regulares. Antes de começarmos a desenvolver a teoria necessária a essa tarefa, comecemos por fixar a seguinte nomenclatura:

Definição 5.3.1: Ponto crítico

Seja f uma função diferenciável num ponto a interior ao domínio de f. Se $f'(a) = 0$, a diz-se um ≪ponto crítico de f≫.

Geometricamente, a é um ponto crítico de f se a tangente ao gráfico de f no ponto $A(a; f(a))$ for horizontal. Vimos também, na Secção 3.1, que se f atingir um extremo local num ponto a interior ao seu domínio então a é um ponto crítico de f (Teorema de Fermat).

Assim, para localizarmos os extremantes locais de uma dada função f, parece ser uma boa ideia começar por determinar os respetivos pontos críticos.
Contudo, um ponto interior ao domínio de f pode ser um ponto crítico sem que se trate de um extremo local, como ilustramos de seguida:

Exemplo 5.3.1 Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$. Tem-se $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$: $a = 0$ é um ponto crítico de f. Contudo, para todo o $x > 0$, $f(x) > 0 = f(0)$ e, para todo o $x < 0$, $f(x) < 0 = f(0)$, pelo que $a = 0$ não é um extremante local de f.

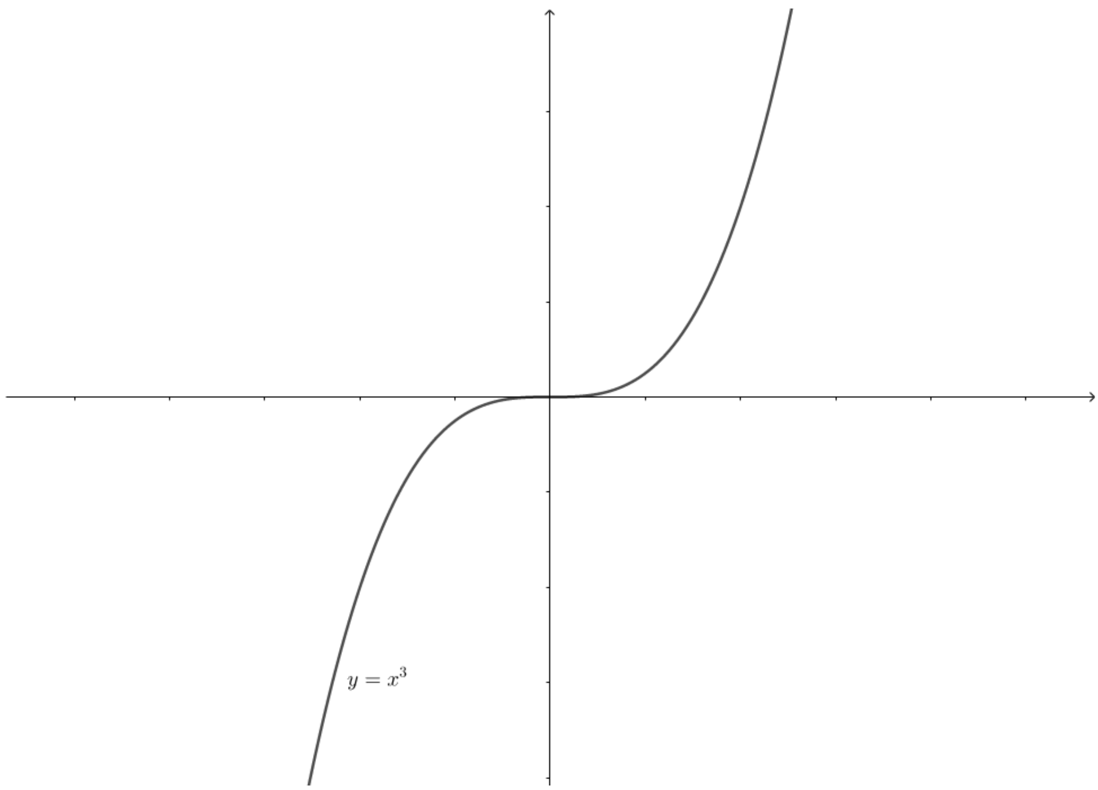


Figura 5.4: Ponto de sela

O gráfico desta função, que se assemelha ao dorso de um cavalo, motiva a seguinte definição:

Definição 5.3.2: Ponto de sela

Seja f uma função diferenciável num ponto a interior ao domínio de f. a diz-se um «ponto de sela de f» se $f'(a) = 0$ e a não for um extremante local de f.

No caso de f admitir derivadas de ordem superior, existe um critério simples que permite distinguir, de entre os pontos críticos de f, os extremantes locais e os pontos de sela:

Teorema 5.3.1: Classificação de pontos críticos

Seja f uma função n vezes diferenciável num intervalo aberto I, com $n \geq 2$, e $a \in I$ um ponto crítico de f. Se existir $2 \leq k \leq n$ tal que

$$f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Então:
- Se k é ímpar, a é um ponto de sela de f.
- Se k é par, a é um extremante local de f, e
  - se $f^{(k)}(a) > 0$, f atinge um mínimo local em f.
  - se $f^{(k)}(a) < 0$, f atinge um máximo local em f.

Prova. *Como* $f'(a) = f^{(2)}(a) = \cdots = f^{k-1}(a) = 0$, *o polinómio de Taylor de* f *de ordem* k *centrado em* a *é dado por*

$$P_k(x) = f(a) + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

e, pelo Teorema 5.2.2, *numa dada vizinhança* $\mathscr{V}_a$ *de* a,

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^k \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0,$$

ou seja,

$$f(x) - f(a) = (x-a)^k \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \varepsilon(x) \right).$$

Como $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, *para* x *suficientemente próximo de* a, $\left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \varepsilon(x) \right)$ *tem o mesmo sinal de* $f^{(k)}(a)$.

Assim, para todo o x *numa certa vizinhança de* a*:*
- *Se* k *é par e* $f^{(k)}(a) > 0$, $f(x) - f(a) > 0$*:* a *é um minimizante local;*
- *Se* k *é par e* $f^{(k)}(a) < 0$, $f(x) - f(a) < 0$*:* a *é um maximizante local;*
- *Se* k *é ímpar,* $f(x) - f(a)$ *muda de sinal em* $x = a$*:* a *é um ponto de sela.*

5.4 Exercícios do Capítulo 5

Exercício 5.4.1 Considere as funções definidas pelas expressões

$f(x) = e^x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $h(x) = \ln(x)$, e $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Explicite os polinómios de Taylor de ordens $n = 1$ e $n = 2$ de:

(i) f, centrados no ponto $a = 0$;
(i) g, centrados no ponto $a = 1$;
(i) h, centrados no ponto $a = 1$;
(i) i, centrados no ponto $a = 16$.

(b) Esboce o gráfico destas funções, e, no mesmo referencial, os gráficos dos respetivos polinómios de Taylor de ordens 1 e 2.

(c) Utilize os polinómios de segunda ordem obtidos na primeira alínea para obter aproximações de

$$\ln(1,1); \qquad \sqrt[10]{e}; \qquad \frac{1}{\sqrt{0,8}}; \qquad \sqrt{17}.$$

Verifique com uma calculadora a qualidade destas aproximações.

Nota: Na verdade, a simples utilização do polinómio de Taylor para efetuar uma estimativa pontual não é suficiente para aferir a precisão da mesma. Em contra-partida, a utilização da fórmula de Taylor, objeto dos próximos exercícios, permite majorar o erro efetuado neste tipo de aproximações.

Exercício 5.4.2 Considere a função i definida por $i(x) = \sqrt{x}$.

(a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 16$ para a função i.

(b) Mostre que o erro cometido com a aproximação linear obtida para $\sqrt{17}$ no exercício anterior não excede $\frac{1}{96}$.

Exercício 5.4.3 Considere as funções f e g definidas por $f(x) = e^x$ e $h(x) = \ln(x)$.

(a) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 0$ para a função f.

(b) Explicite a fórmula de Taylor de ordem 2 centrada em $a = 1$ para a função h.

(c) Utilizando as alíneas anteriores, majore o erro cometido no Exercício 5.4.1 nas aproximações de segunda ordem de $\sqrt[10]{e}$ e de $\ln(1,1)$.

Exercício 5.4.4 Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange, centrada nos pontos a indicados, para:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $a = 1$;

(b) $g(x) = \sqrt{9-x}$, $a = 0$;

(c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+3}}$, $a = \frac{1}{3}$;

(d) $j(x) = \arctan(x)$, $a = 1$;

(e) $u(x) = \arcsin(x)$, $a = 0$.

Exercício 5.4.5 Considere a função f definida por $f(x) = x^3$.

(a) Escreva os polinómios de Taylor de ordens 1, 2 e 3, da função f, centrados no ponto $a = 1$.

(b) Explicite as fórmulas de Taylor de f com resto de Lagrange centradas no ponto $a = 1$ e de ordens 1, 2 e 3.

(c) Como se pode escrever o polinómio $P(x) = x^4$ como soma de potências de $(x-2)$?

Exercício 5.4.6 Escreva a fórmula de Maclaurin de ordem n, com o resto de Lagrange, das funções

(a) e^{x^3} (b) $\ln(1+2x)$ (c) $\frac{1}{1-x^2}$ (d) $\arctan(x)$

Exercício 5.4.7 A partir do polinómio de Maclaurin para e^x, obtenha o polinómio de Taylor de ordem n, centrado no ponto 2, da função definida por $f(x) = e^{3x+2}$.

Exercício 5.4.8 Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e sejam ϕ e ψ definidas por $\phi(x) = f(e^{x^2-1})$ e $\psi(x) = f(\arcsin(x))$.
Mostre que

(a) as funções ϕ e ψ são respetivamente de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e em $]-1;1[$.

(b) $\phi'(1) = \psi'(0)$;
(c) $\phi''(1) - 2\phi'(1) - 4\psi''(0) = 0$.

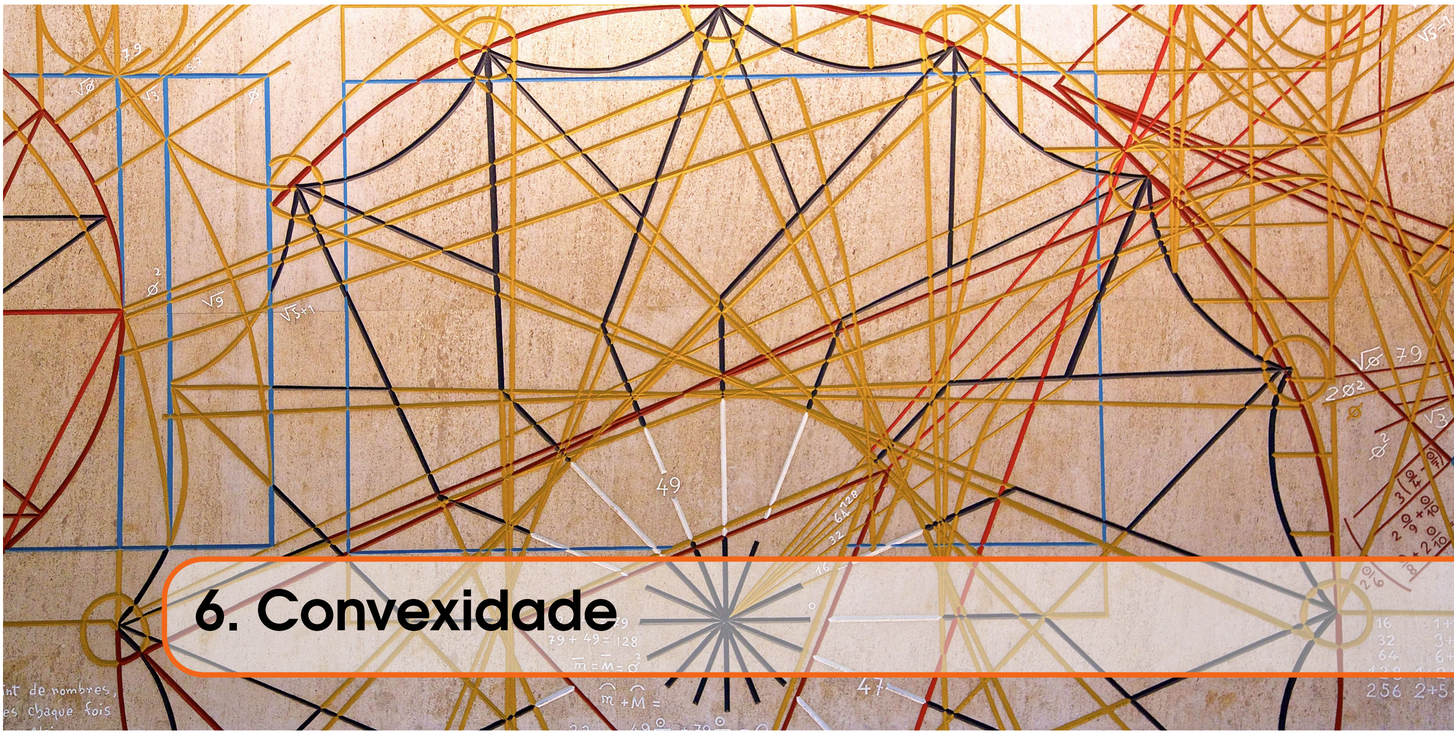
Exercício 5.4.9 Determine os pontos críticos das seguintes funções e, para cada um deles, averigue se se trata de um minimizante local, de um maximizante local ou de um ponto de sela.

(a) $4x^3 - 8x - 12$ (b) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ (c) $x(x-3)^2 + 4$

(d) $x + \dfrac{1}{x}$ (e) $x^3 - \dfrac{2}{x}$ (f) $\dfrac{x}{e^x}$

(g) $\dfrac{x}{3^x}$ (h) $\dfrac{x}{1-x^2}$ (i) xe^x

(j) $x\ln(x)$ (k) $e^x(x^2-1)^3$ (l) $e^{2x-1}(x^2-3)^2$



6. Convexidade

6.1 Funções convexas e funções côncavas

As funções convexas têm um papel importante em vários problemas de otimização. Dedicamos a presente secção ao seu estudo. Geometricamente, uma função diz-se convexa se qualquer segmento que una dois pontos do respetivo gráfico (a ≪corda≫) ficar situado ”acima” deste, como se ilustra na figura seguinte:

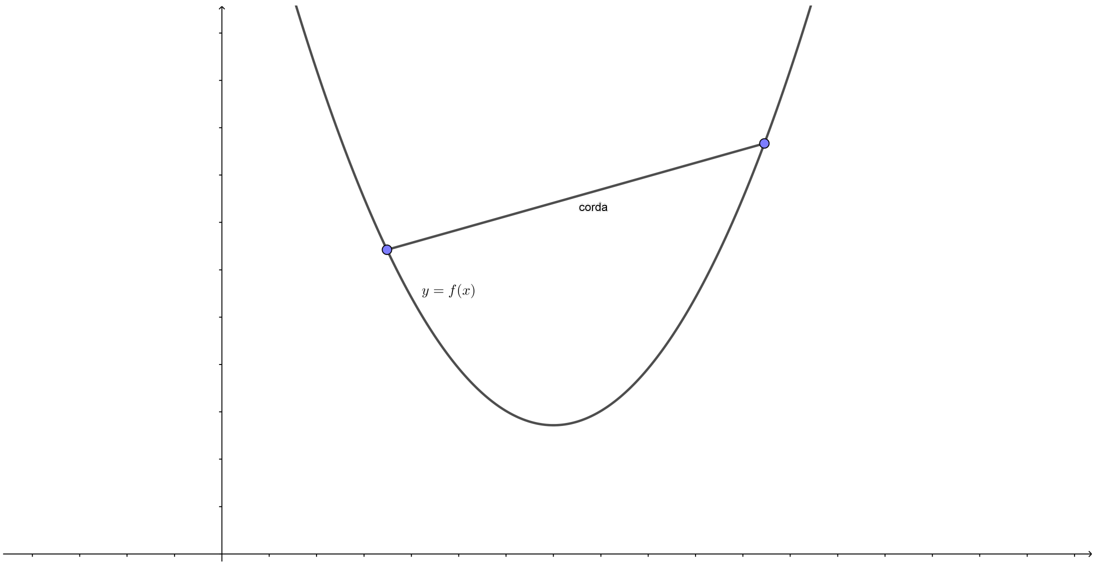


Figura 6.1: Corda acima do gráfico

De forma análoga, uma função diz-se côncava se as cordas ficarem ”abaixo” do gráfico:

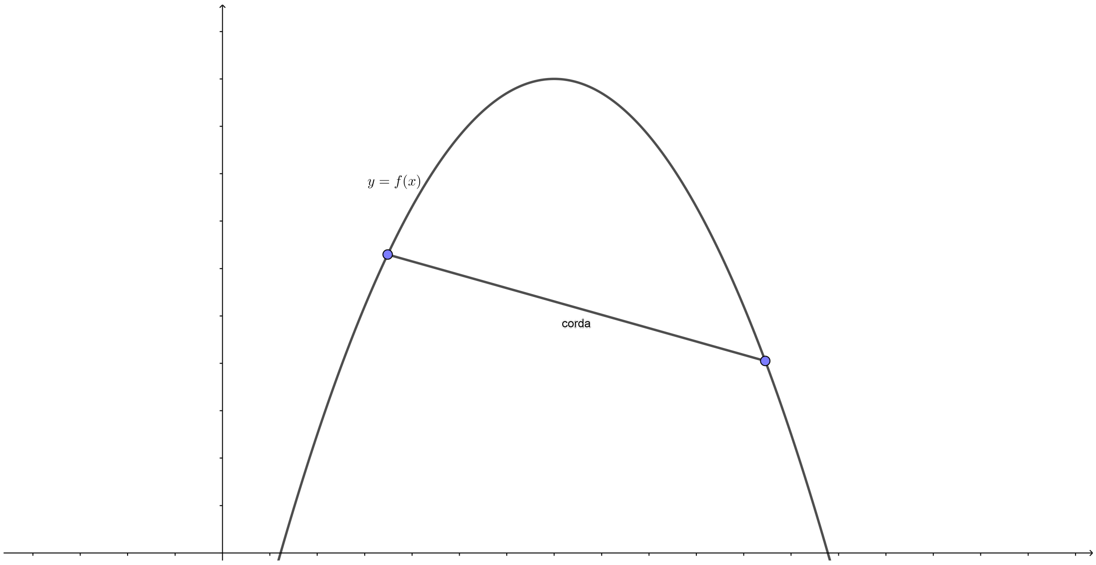


Figura 6.2: Corda abaixo do gráfico

Vamos formalizar um pouco esta ideia: os pontos de um dado segmento $[x_0;x_1]$ são os pontos da forma $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$, com $t \in [0;1]$. Consideremos por outro lado o segmento de reta de extremidades $(x_0, y_0 = f(x_0))$ e $(x_1, y_1 = f(x_1))$. A ordenada do ponto deste segmento de reta que tem abcissa x_t é dada por $y_t = tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$. Assim, dizer que o segmento de reta está "acima"(respetivamente "abaixo") do gráfico é o mesmo que dizer que se tem $f(x_t) \leq y_t$ (respetivamente $f(x_t) \geq y_t$) para todo o t.

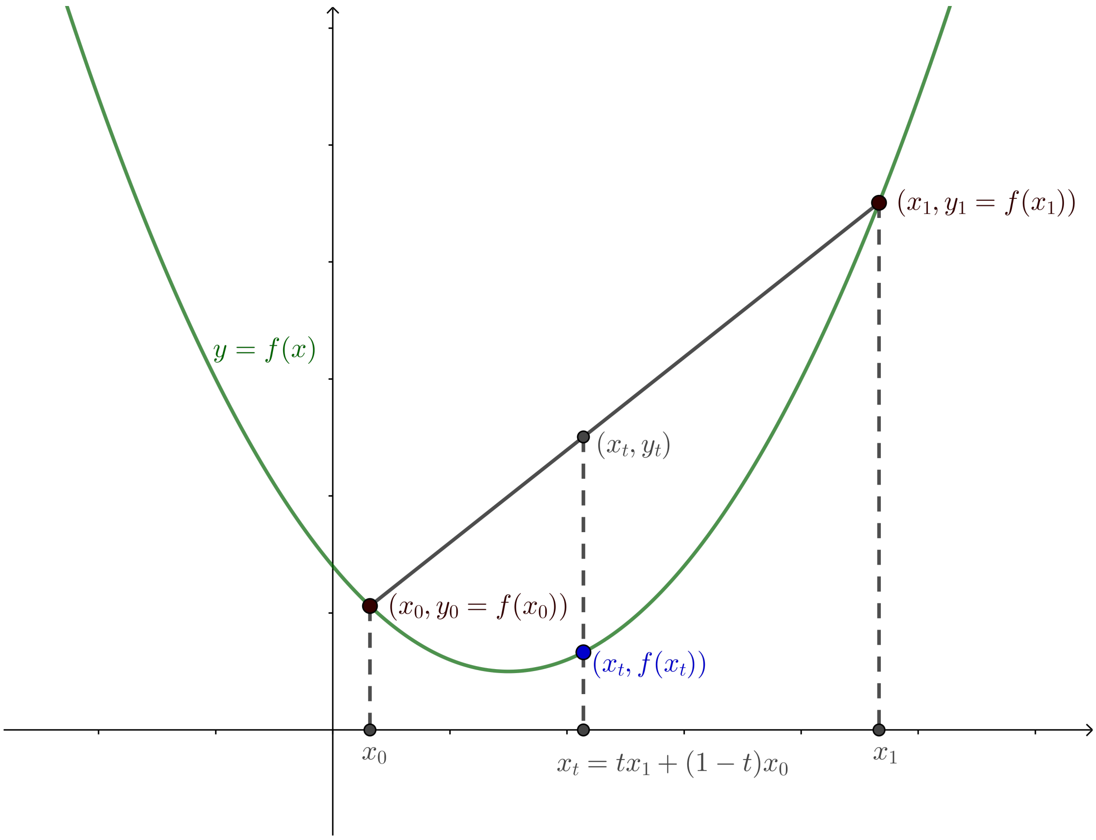


Figura 6.3: Caracterização analítica da concavidade

Definição 6.1.1: Função convexa - Função côncava

Seja f uma função definida num intervalo I.
A função f diz-se ≪convexa≫ em I se para quaisquer $x_0, x_1 \in I$,

$$\forall t \in [0;1],\; f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

A função f diz-se ≪côncava≫ em I se para quaisquer $x_0, x_1 \in I$,

$$\forall t \in [0;1],\; f(tx_1 + (1-t)x_0) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

Se as desigualdades acima forem estritas para todo o $t \in]0;1[$, f diz-se ≪estritamente convexa≫/≪estritamente côncava≫.

Fornecemos de seguida uma caracterização muito útil destas funções:

Teorema 6.1.1: Caracterização das funções convexas

Seja f uma função definida num intervalo I. A função f é convexa se para quaisquer $x_a < x_b < x_c$ no intervalo I,

$$\frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \leq \frac{f(x_c) - f(x_b)}{x_c - x_b},$$

isto é, considerando os pontos $A(x_a; f(x_a))$, $B(x_b; f(x_b))$ e $C(x_c; f(x_c))$, e os declives m_{AB} e m_{BC} das retas AB e AC,

$$m_{AB} \leq m_{BC}.$$

Da mesma forma, f é côncava se

$$\frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a} \geq \frac{f(x_c) - f(x_b)}{x_c - x_b},$$

ou seja, se

$$m_{AB} \geq m_{BC}.$$

Finalmente, se todas as desigualdades acima forem estritas, obtém-se uma condição necessária e suficiente para que f seja estritamente convexa/côncava.

Prova. *Retomemos as notações da Definição 4.1.1:*
$x_0 := x_a$, $x_1 := x_c$ *e* $x_t = x_b$ *para algum* $t \in]0;1[$. *Então,*

$$m_{AB} \leq m_{BC} \Leftrightarrow \frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}$$

$$\Leftrightarrow (f(x_t) - f(x_0))(x_1 - x_t) \leq (f(x_1) - f(x_t))(x_t - x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_t)x_1 - f(x_0)x_1 + f(x_0)x_t \leq f(x_1)x_t - f(x_1)x_0 + f(x_t)x_0$$

$$\Leftrightarrow f(x_t)(x_1 - x_0) \leq (f(x_1) - f(x_0))x_t - f(x_1)x_0 + f(x_0)x_1$$

$$\Leftrightarrow f(x_t)(x_1-x_0) \leq (f(x_1)-f(x_0))(tx_1+(1-t)x_0) - f(x_1)x_0 + f(x_0)x_1$$

$$\Leftrightarrow f(x_t)(x_1-x_0) \leq tf(x_1)(x_1-x_0)+(1-t)f(x_0)(x_1-x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_t) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_0),$$

podendo também obter-se a caracterização das funções côncavas invertendo todas as desigualdades acima, e a das funções estritamente convexas/côncavas substituindo-as por desigualdades estritas.

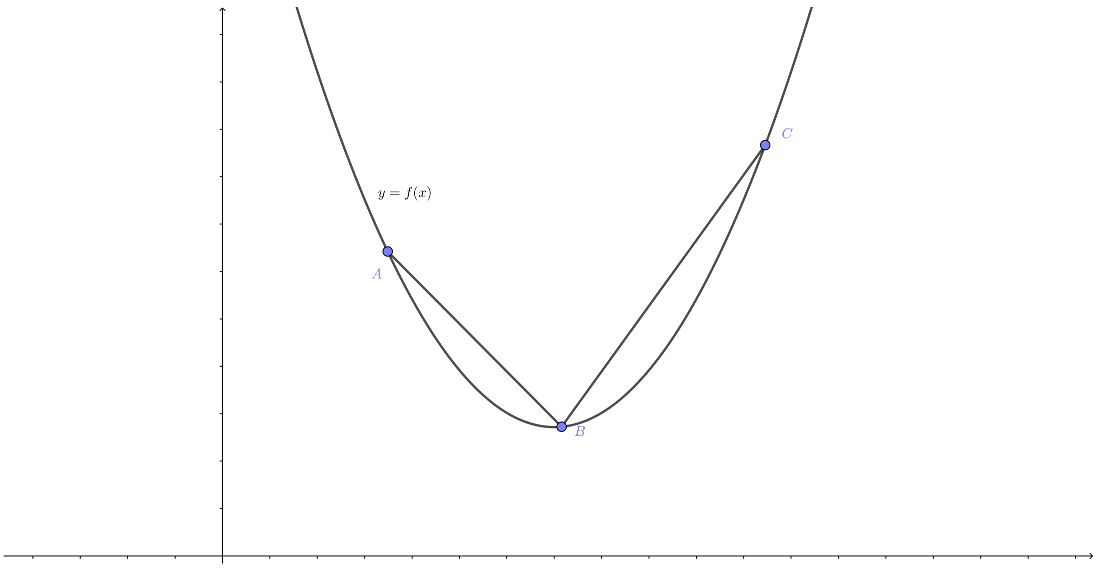


Figura 6.4: $m_{AB} \leq m_{BC}$

Exemplo 6.1.1 Vamos demonstrar que a função f definida em $\mathbb{R}_0^+$ por

$$f(x) = \sqrt{x}$$

é estritamente côncava. Sejam pois $0 \leq x_a < x_b < x_c$:

$$\frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a} > \frac{f(x_c)-f(x_b)}{x_c-x_b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_b}-\sqrt{x_a}}{x_b-x_a} > \frac{\sqrt{x_c}-\sqrt{x_b}}{x_c-x_b}.$$

Multiplicando pelas quantidades ditas ”conjugadas”,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_b}+\sqrt{x_a}} > \frac{1}{\sqrt{x_c}+\sqrt{x_b}} \Leftrightarrow \sqrt{x_c} > \sqrt{x_a},$$

o que é uma proposição verdadeira.

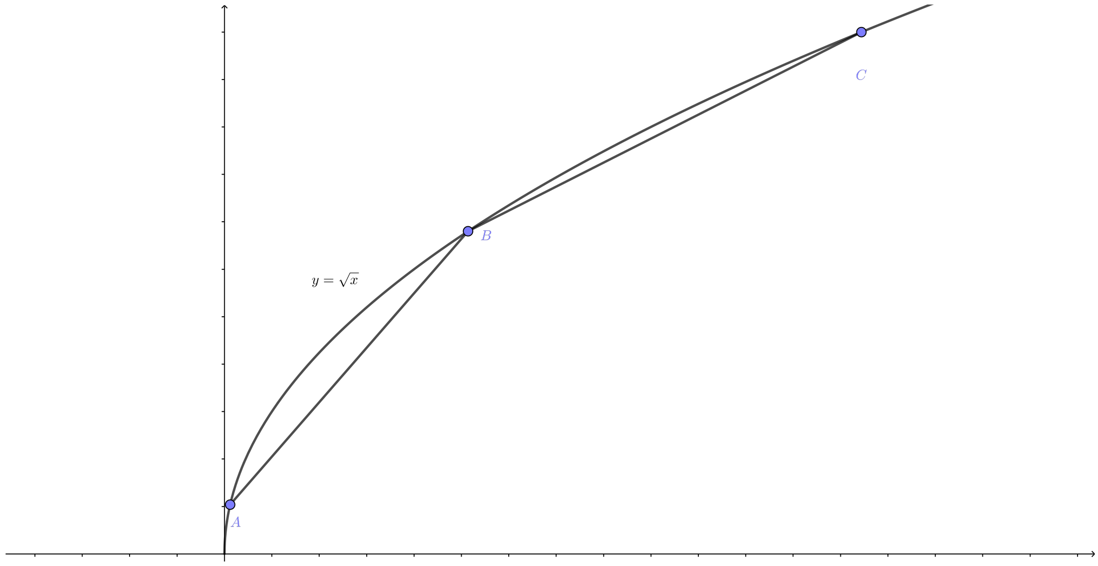


Figura 6.5: $y = \sqrt{x}$

Observação 6.1.1. *Diz-se por vezes do gráfico de uma função convexa (respetivamente côncava) que tem a "concavidade virada para cima" (respetivamente "para baixo"). Utilizaremos ocasionalmente esta nomenclatura.*

A seguinte proposição é de demonstração imediata:

Proposição 6.1.1

$$f \text{convexa em } I \Leftrightarrow -f \text{côncava em } I.$$

Apresentamos agora a noção de ponto de inflexão. Um ponto de inflexão é um ponto que separa uma região em que f é convexa de uma em que f é côncava. Mais precisamente:

Definição 6.1.2: Ponto de inflexão

Seja a um ponto interior do domínio de f. Se, para um certo $h > 0$, f é convexa (respetivamente côncava) no intervalo $]a-h;a]$ e côncava (respetivamente convexa) no intervalo $[a;a+h[$, a diz-se um ≪ponto de inflexão de f≫.

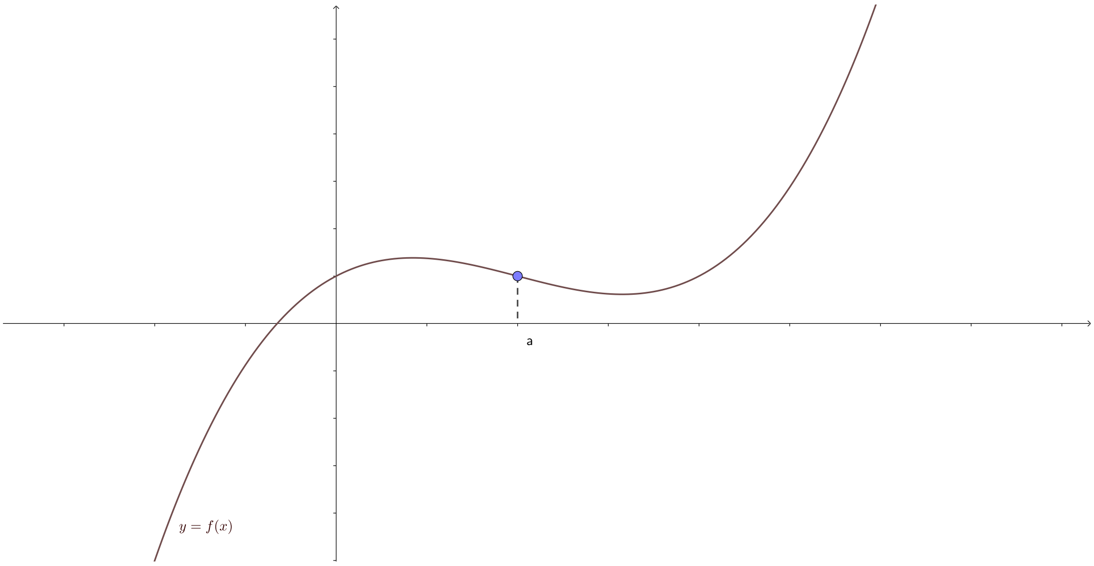


Figura 6.6: Ponto de inflexão

6.2 Convexidade e diferenciabilidade

Se uma dada função for diferenciável, existe um critério simples para saber se se trata de uma função convexa ou côncava:

Teorema 6.2.1: Convexidade e monotonia da derivada

Seja f uma função diferenciável num intervalo I. Então

$$f \text{ (estritamente) convexa em } I \Leftrightarrow f' \text{ (estritamente) crescente em } I.$$

$$f \text{ (estritamente) côncava em } I \Leftrightarrow f' \text{ (estritamente) decrescente em } I.$$

Prova. *A segunda afirmação deduz-se trivialmente da primeira, considerando por exemplo a função $-f$ e utilizando a Propriedade 6.1.1. Assim, apenas justificaremos a primeira equivalência.*

- $\Rightarrow$ *Suponhamos que f é convexa em I. Sejam $x_0 < x_1$ dois pontos de I. Pretendemos provar que então $f'(x_0) \leq f'(x_1)$. Consideremos dois pontos suplementares x e y tais que $x_0 < x < y < x_1$.*
  Como f é estritamente convexa,
  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y},$$
  ou seja, ignorando o termo do meio,
  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y}.$$
  Passando aos limites $x \to x_0$ e $y \to x_1$ obtém-se que $f'(x_0) \leq f'(x_1)$.
- $\Leftarrow$ *Suponhamos agora que f' é crescente em I. Sejam $x_0 < x_1$ dois quaisquer pontos de I e $x_t \in]x_0; x_1[$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $a \in]x_0; x_t[$ e existe $b \in]x_t; x_1[$ tais que*
  $$f'(a) = \frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} \text{ e } f'(b) = \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}.$$

Notando que $a < b$ e que f' é crescente,

$$\frac{f(x_t) - f(x_0)}{x_t - x_0} = f'(a) \leq f'(b) = \frac{f(x_1) - f(x_t)}{x_1 - x_t}.$$

Uma adaptação simples destes argumentos permite provar a equivalência também no caso em que a convexidade e a monotonia são estritas.

Exemplo 6.2.1 A função f definida por $f(x) = e^x + x^4$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 4x^3$. Como f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ (trata-se da soma de duas funções estritamente crescentes), f é estritamente convexa em $\mathbb{R}$.

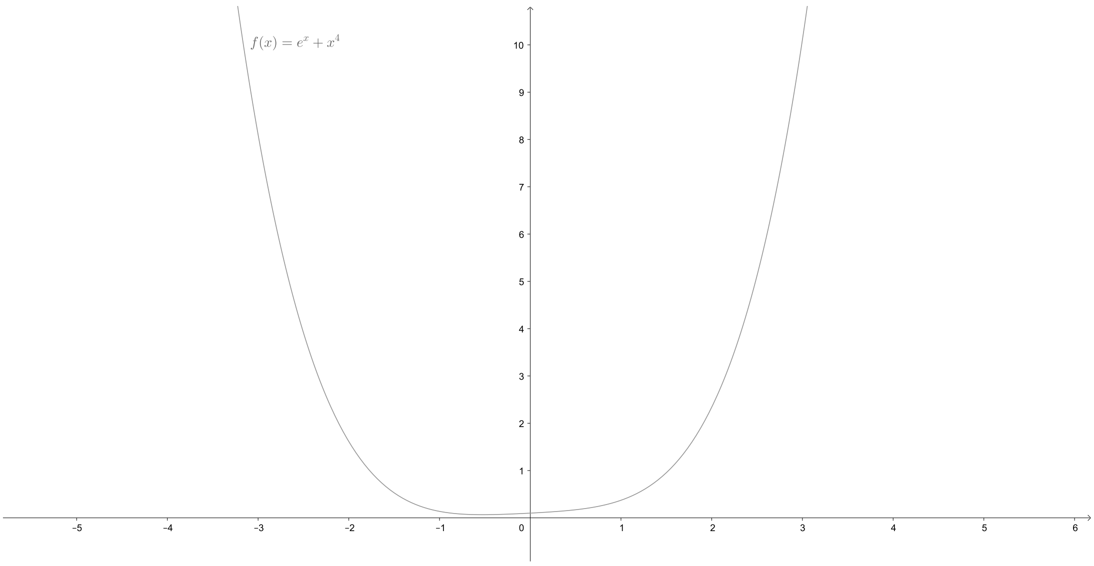


Figura 6.7: $y = e^x + x^4$

O gráfico das funções convexas têm a interessante propriedade geométrica de se situar acima das respetivas tangentes. Mais concretamente:

Proposição 6.2.1 Seja f uma função convexa e diferenciável num intervalo I, $A(a; f(a))$ um ponto do respetivo gráfico G_f e $r : y = (x-a)f'(a) + f(a)$ a reta tangente a G_f no ponto A. Então G_f está contido no semiplano

$$\pi^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-a)f'(a) + f(a)\}.$$

Analogamente, se f for côncava, G_f está contido no semiplano

$$\pi^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq (x-a)f'(a) + f(a)\}.$$

Prova. *Vamos provar a afirmação no caso em que f é convexa.*
Seja x_0 um qualquer ponto de I.
Sejam $B(x_0; y_B = (x_0 - a)f'(a) + f(a))$ e $C(x_0; y_C = f(x_0))$, respetivamente, as interseções da reta tangente r com o gráfico de f e com a reta vertical de equação $x = x_0$.
Trata-se de mostrar que $y_B \leq y_C$. Tem-se

$$y_B \leq y_C \Leftrightarrow (x_0 - a)f'(a) + f(a) \leq f(x_0) \Leftrightarrow (x_0 - a)f'(a) \leq f(x_0) - f(a).$$

- *Se $x_0 = a$, esta última desigualdade verifica-se trivialmente.*

- *Se $x_0 \neq a$ (por exemplo $x_0 > a$, o caso $x_0 < a$ pode ser tratado de forma similar),*

$$y_B \leq y_C \Leftrightarrow f'(a) \leq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a},$$

o que é verdade. De facto, pelo Teorema de Lagrange, existe $b \in]a; x_0[$ tal que

$$f'(b) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}.$$

Como $a < b$ e, pelo Teorema 6.2, f' é crescente, $f'(a) \leq f'(b)$.

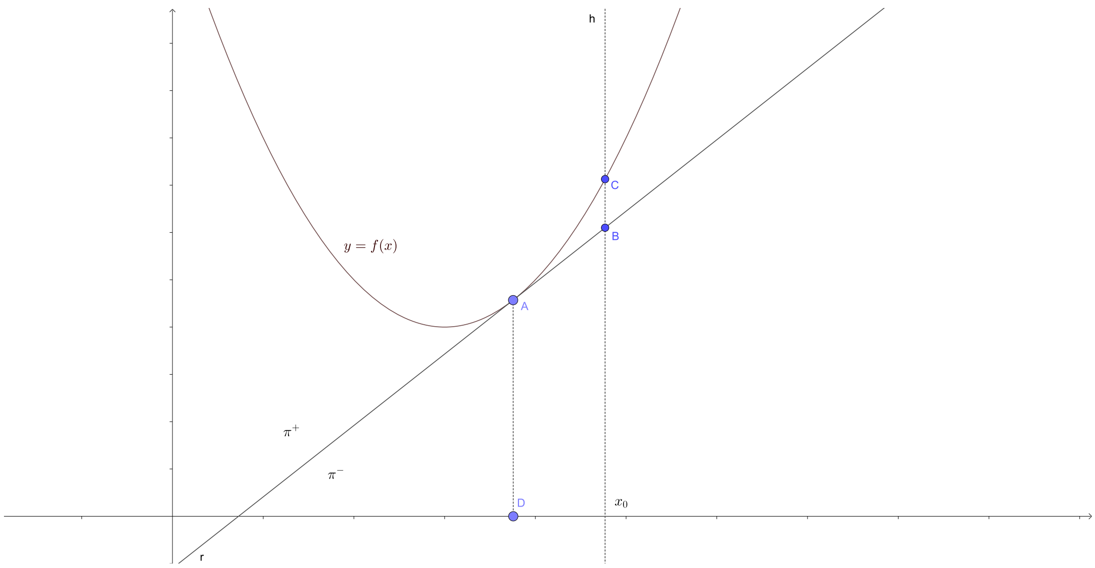


Figura 6.8

Uma consequência imediata deste resultado é o facto de, num ponto de inflexão, a tangente ao gráfico de f ”atravessar”o gráfico.

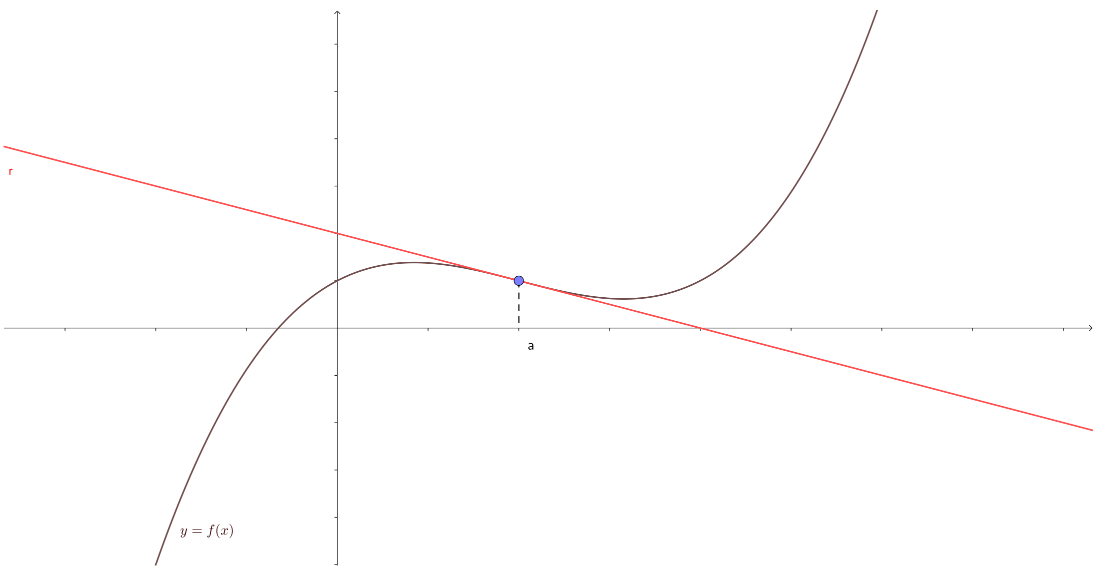


Figura 6.9: Tangente a um gráfico num ponto de inflexão

Tal como mencionámos no início deste capítulo, as funções convexas são particularmente utilizadas em muitos problemas de otimização. Isso deve-se, essencialmente, ao facto de ser extremamente fácil identificar os eventuais máximos e mínimos globais de funções convexas/côncavas, como se ilustra no resultado seguinte:

Teorema 6.2.2: Extremos de funções convexas/côncavas

Seja f uma função convexa definida num intervalo aberto I. Seja $x_0 \in I$. Então,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ atinge um mínimo global em } x_0.$$

De forma análoga, se f é côncava em I,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ atinge um máximo global em } x_0.$$

A demonstração é imediata. Com efeito, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0; f(x_0))$ é horizontal, tendo por equação $y = f(x_0)$. Se f for por exemplo convexa, pelo resultado anterior, o gráfico de f situa-se acima desta reta, ou seja,

$$\forall x \in I,\, f(x) \geq f(x_0).$$

Observação 6.2.1. *Note-se que uma função diferenciável e estritamente convexa/côncava num intervalo aberto admite no máximo um ponto crítico.*

6.3 Convexidade e derivadas de ordem superior

Supomos agora que f é pelo menos duas vezes diferenciável. Um primeiro resultado permite utilizar o sinal de f'' para determinar se f é convexa/côncava.

Teorema 6.3.1: Convexidade e segunda derivada

Seja f uma função duas vezes diferenciável num dado intervalo I. Então,

- $\forall x \in I,\, f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ é convexa em I.
- $\forall x \in I,\, f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ é côncava em I.
- $\forall x \in I,\, f''(x) > 0 \Rightarrow f$ é estritamente convexa em I.
- $\forall x \in I,\, f''(x) < 0 \Rightarrow f$ é estritamente côncava em I.

A prova desta proposição é imediata atendendo ao Teorema 4.2.1.
Do Teorema 6.3.1 resulta uma condição necessária para que um dado ponto seja um ponto de inflexão:

Teorema 6.3.2: Segunda derivada e pontos de inflexão

Seja f uma função duas vezes diferenciável num intervalo I e a um ponto interior de I. Então,

$$a \text{ é ponto de inflexão de } f \Rightarrow f''(a) = 0.$$

A recíproca é claramente falsa: é fácil verificar que a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^4$ é convexa em $\mathbb{R}$ (observe-se por exemplo que $f'(x) = 4x^3$ é crescente), e, contudo, $f''(0) = 0$.
O seguinte critério permite esclarecer esta situação em numerosos casos:

Teorema 6.3.3: Identificação de pontos de inflexão

Seja f uma função n vezes diferenciável num intervalo aberto I, com $n \geq 3$, e $a \in I$ um ponto interior de I. Se existir $3 \leq k \leq n$ tal que

$$f^{(2)}(a) = f^{(3)}(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Então:

- Se k é ímpar, a é um ponto de inflexão de f.
- Se k é par,
  - se $f^{(k)}(a) > 0$, f é convexa numa vizinhança de a.
  - se $f^{(k)}(a) < 0$, f é côncava numa vizinhança de a.

Prova. *A função f'' é diferenciável $n-2$ vezes em I. Com as hipóteses do Teorema, o polinómio de Taylor de f'' centrado em a de ordem k é $P_k(x) = \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. Assim, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_a$ de a tal que*

$$f''(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^k \varepsilon(x) = (x-a)^k \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \varepsilon(x) \right), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Para x suficientemente próximo de a, o sinal de $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} + \varepsilon(x)$ é igual ao sinal de $f^{(k)}(a)$.
Assim: Se k é par e $f^{(k)}(a) > 0$, f'' é não negativa numa vizinhança de a e f é convexa nessa mesma vizinhança.
Da mesma forma, se $f^{(k)}(a) < 0$, f é côncava numa vizinhança de a.
Finalmente, se k é ímpar, existe $h > 0$ tal que f é convexa/côncava em $[a; a+h[$ e côncava/convexa em $]a-h; a]$: a é um ponto de inflexão.

Observação 6.3.1. *Note-se que um ponto sela não é necessariamente um ponto de inflexão: retomemos a função g da Observação 3.4.2:*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{se} \quad x = 0, \end{cases}$$

tem-se que $g'(0) = 0$: 0 é um ponto crítico de f.
Por outro lado, $g(0) = 0$ e em qualquer vizinhança de 0, g toma valores positivos e negativos: a origem não é portanto um extremante local, tratando-se de um ponto sela.
Contudo, para $x \neq 0$,

$$g''(x) = 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right):$$

a segunda derivada muda de sinal uma infinidade de vezes em qualquer vizinhança de 0.

6.4 Exercícios da Parte 6

Exercício 6.4.1 Mostre, pela definição, que a função afim é simultaneamente côncava e convexa.

Exercício 6.4.2 Mostre, pela definição, que qualquer função polinomial da forma ax^2+bx+c, com $a \neq 0$, é estritamente convexa ou estritamente côncava em $\mathbb{R}$, e indique em que condições se verifica cada um dos casos.

Exercício 6.4.3 Mostre, pela definição, que a função f, definida por $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, com $\alpha \neq 0$, é

(a) côncava em $\mathbb{R}^-$ e convexa em $\mathbb{R}^+$, se $\alpha > 0$.
(b) convexa em $\mathbb{R}^-$ e côncava em $\mathbb{R}^+$, se $\alpha < 0$.

Exercício 6.4.4 Estude as concavidades e localize os pontos de inflexão das funções definidas pelas expressões

(a) $5x - x^2$ (b) $x^2 - 4x + 2$

(c) $3x - x^5$ (d) $(x^2-9)^3$ (e) $\dfrac{x}{x^2+4}$

(g) xe^x (h) e^{-3x^2} (i) $\ln(1-x^2)$

(k) $x\arctan(x)$ (l) $|2x^2+9x-5|$

Exercício 6.4.5 Estude as funções seguintes quanto à monotonia e extremantes, concavidades e pontos de inflexão, e esboce o correspondente gráfico.

(a) $x(x^2-9)$ (b) $5x^3-4x^5$ (c) $\dfrac{x}{x^2-1}$

(d) $xe^{\frac{1}{x}}$ (e) $\dfrac{\ln(x)}{x}$ (f) $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(g) $\dfrac{|x|}{2-|x|}$ (h) $(x^3-1)^5e^{-3x^2}$

(i)

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(3x) & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{1-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

7. Exercícios Suplementares da Parte I

7.1 Exercícios de aplicação

Exercício 7.1.1 O lucro mensal obtido por uma empresa com a comercialização de um dos seus produtos é

$$L(x) = 160x - (10-5x)^4 + 1500 \; u.m.$$

em que x representa a quantidade mensal vendida, em milhares de unidades.

(a) Calcule a função lucro marginal.

(b) Utilizando a alínea anterior, determine o número ideal de unidades a vender mensalmente por forma a maximizar o lucro.

Exercício 7.1.2 Um produto é vendido ao preço de 300 $u.m.$ a unidade e tem um custo de produção de $C(x) = 150x + 0{,}004x^2 + 800000 \, u.m.$, em que x representa o número de unidades produzidas. Sabendo que a capacidade produtiva mensal é de 20000 unidades do produto, determine o melhor plano mensal de produção.

Exercício 7.1.3 O custo de produção diário de x unidades de um produto é dado pela expressão $C(x) = x^2 + 2x + 70 \; u.m.$ Atualmente, são produzidas 20 unidades por dia.

(a) Explicite o custo de produzir h unidades adicionais por dia.

(b) Calcule o custo de produzir uma unidade adicional por dia.

(c) Calcule o custo marginal de produção.

(d) Comente os resultados obtidos nas alíneas (b) e (c).

Exercício 7.1.4 O custo de produção mensal de x unidades de um produto é de $C(x) = x(x-4)^2 + 5x \; u.m.$

Explicite:

(a) A função custo marginal de produção.

(b) A função custo médio de produção de uma unidade.

(c) As quantidades a produzir para as quais se verifica que um pequeno aumento da quantidade produzida resulta numa diminuição no custo médio de produção.

Exercício 7.1.5 Para aproveitar alguns excedentes de produção, uma empresa vai lançar um novo produto no mercado. Esses excedentes são suficientes para a produção de 5000 unidades mensais. Um estudo de mercado indicou que a procura do produto será de pelo menos 5100 unidades por mês. O custo fixo mensal de produção do novo produto é de 7 $u.m.$ O custo variável de produção é de $x^2 - 2x u.m.$, em que x representa o números de unidades produzidas, em milhares. O produto será vendido ao preço unitário de $0,006$ $u.m.$

(a) Calcule o lucro mensal de produção do novo produto, admitindo que a capacidade de produção da empresa será usada na totalidade.

(b) Qual a quantidade ideal deste produto a comercializar mensalmente por forma a maximizar o lucro?

Exercício 7.1.6 Use as regras dos 70, 72 e $69,3$ para estimar o tempo de duplicação de um investimento de 1000 u.m. para as taxas de juro anuais de 1%, 2%, 6%, 8%, 10% e 20%.

Exercício 7.1.7 A procura de um determinado produto, de preço unitário p $u.m.$, é dada por

$$Q(p) = 300p^{-3}\ unidades,$$

sendo o preço unitário atual de $p_0 = 4$ $u.m.$

(a) Calcule a variação percentual da
procura face a um aumento de 1% do preço.

(b) Calcule a elasticidade da função procura e comente.

Exercício 7.1.8 A procura marginal de um dado é dada por produto - em função do respetivo preço de venda p - é dada por $MP(p) = 2p$. Sabe-se também que se o preço for de 2 $u.m.$ serão vendidas 500 unidades do produto. Determine uma expressão analítica para a elasticidade da receita relativamente ao preço p.

Exercício 7.1.9 Numa padaria de fabrico de pão artesanal, a relação entre a quantidade de pão vendida diariamente (q, em centenas de quilogramas) e o preço por quilograma ($P(q)$ $u.m.$) é dada por

$$P(q) = \frac{375}{64} - \frac{5}{256}q^2 - \frac{25}{64}q,$$

sendo atualmente o pão vendido ao preço de 5 $u.m.$ por quilograma.

(a) Calcule a elasticidade da quantidade de pão vendida relativamente ao preço em vigor.

(b) O proprietário da padaria gostaria de aumentar o preço do pão para $5,1$ $u.m.$ por quilograma. Use o resultado obtido na alínea anterior para obter uma aproximação para o efeito deste aumento nas vendas de pão, e na receita, e comente os resultados obtidos.

7.2 Exercícios selecionados

Exercício 7.2.1 Seja f uma função de classe C^1, de domínio $\mathbb{R}$, e g a função definida por $g(x) = \arctan(2f(x)) - f(\arctan(2x))$. Sabendo que $f(0) = 1$ e que $f'(0) = \frac{1}{4}$, calcule a derivada da função g no ponto 0.

Exercício 7.2.2 Seja f uma função diferenciável.
Mostre que

(a) se f é par então a derivada de f é ímpar;
(b) se f é ímpar então a derivada de f é par.

Exercício 7.2.3 Mostre que entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo não existe mais de um zero da função.

Exercício 7.2.4 Demonstre as desigualdades seguintes:

(a) $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x < 1$, para todo o $x > 0$.
(b) $\tan(x) \geq x$, para todo o $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$
(c) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x)$, para todo o $x > 0$.
(d) $\dfrac{x}{x^2+1} \leq \arctan(x)$, para todo o $x > 0$.

Exercício 7.2.5 Mostre que existe um número real x, entre 0 e 1, tal que

$$\frac{xe^x}{\sqrt{1-(x-1)^2e^{2x}}} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 7.2.6 Seja $f : [a;b] \to [a;b]$ uma função duas vezes diferenciável, e tal que $f(a) = f'(a)$ e $f(b) = f'(b)$. Mostre que existe um número real $c \in]a;b[$ tal que $f(c) = f''(c)$. (Sugestão: recorra à função auxiliar g dada por $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$)

Exercício 7.2.7 Seja f uma função de classe C^2 tal que $f(4) = -2$, $f'(4) = 3$ e $0 \leq f''(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$, para todo o $x > 1$. Use a fórmula de Taylor para localizar $f(5)$ num intervalo com a menor amplitude possível.

Exercício 7.2.8 Considere a função f definida por $f(x) = \ln(x)$.

(a) Calcule f', f'', f''' e $f^{(4)}$. Estabeleça uma conjetura quanto à expressão da derivada $f^{(n)}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demonstre a validade da expressão deduzida, pelo Princípio de Indução Matemática .

(c) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange da função f, centrada em $a = 1$.

Exercício 7.2.9 Considere o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{24e^x - 24 - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4}{x^4}$$

(a) Calcule o limite pela regra de Cauchy.

(b) Calcule o limite utilizando a fórmula de Taylor (com resto de Peano) de ordem 4, da função exponencial, centrada no ponto $a = 0$.

Exercício 7.2.10 Mostre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3e^{1-2x} + 4x^3 - 12x^2 + 15x \geq 8.$$