Universidade de Lisboa – Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática II
2°Semestre 2015/2016
Teste 1: 5 de Abril de 2016
Duração: 1 hora

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (a) Calcule os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébricas.

   (b) Utilize o resultado anterior para calcular o valor de $|A|$.

   (c) Prove que $(5, 0, 0)$ é vector próprio de A e indique a que valor próprio está associado.

2. Considere a forma quadrática definida por

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + (1-k)y^2 + (1+k)z^2 + 2yz.$$

   Classifique-a, em função dos valores de k, para $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2)\sqrt{9 - x^2 - (y-1)^2}}{e^{x+2y}}.$$

   (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

   (b) Defina analiticamente a fronteira do conjunto D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto limitado.

4. Considere a função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$

   (a) Estude a continuidade da função no ponto $(1, 0)$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$.

   (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, para $(x, y) \neq (1, 0)$.

Cotações:

1a)	1b)	1c)	2	3a)	3b)	4a)	4b)	4c)
2,5	1,0	1,5	3,0	2,5	2,0	3,5	2,0	2,0

Teste 1 : 5 Abril 2016 (tópicos de resolução)

1

a) λ valor $\overline{pp}$ de A sse $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \times \left[(1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\right]$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3$$

m.a (1) = 1 ; m.a (2) = 1 ; m.a (3) = 1

b) $|A| = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Se A $n \times n$ tem n valores pps reais (iguais ou distintos), $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ então $|A| = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n$

c) $\bar{u}$ vector $\overline{pp}$ de A se $\bar{u} \neq \bar{0}$ e $A\bar{u} = \lambda \bar{u}$

$$A \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ (5, 0, 0) é vector pp de A associado ao v.p 1 //

2 Matriz simétrica q representa Q: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1+k \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 2(1-k)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 1+k \end{vmatrix} = 2\left[(1-k)(1+k) - 1\right] = 2\left(1 - k^2 - 1\right) =$$

$$= -2k^2$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 2(1-k)$

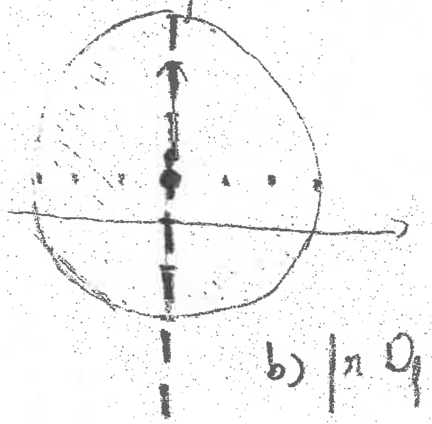
$\Delta_3 = -2k^2 < 0 \ , \ \forall k \neq 0$

Como $\Delta_3 \neq 0$ e A não é D.P porque ($\Delta_3 < 0$), nem D.N porque ($\Delta_1 > 0$) então A indefinida e

$\therefore$ Q é indefinida, $\forall k \neq 0$

③ a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 0 \wedge 9 - x^2 - (y-1)^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge x^2 + (y-1)^2 \leq 9\}$



b) $\operatorname{fr} D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge x^2 + (y-1)^2 \leq 9\}$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 9\}$

$\Rightarrow D_f$ é limitado pq $D_f \subseteq B_3(0,1)$

④ a) Para provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0$ basta notar que

$0 \leq \left| \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} - 0 \right| = \dfrac{y^2 . |y|}{(x-1)^2+y^2} \leq \dfrac{\cancel{((x-1)^2+y^2)} . |y|}{\cancel{(x-1)^2+y^2}}$

$y^2 \leq (x-1)^2 + y^2$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} |y| = 0$

fica provado que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0 = f(1,0)$ e

$\therefore f$ contínua no pto $(1,0)$

(4)

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1, 0+h) - f(1,0)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{3}}}{h^{\cancel{3}}} = 1$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 \times ((x-1)^2+y^2) - 2(x-1) \times y^3}{((x-1)^2+y^2)^2}$

$(x,y) \neq (1,0)$

$= \frac{-2(x-1)y^3}{((x-1)^2+y^2)^2}$, porque $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ é um conjunto aberto (podemos usar regras de derivação)

//