# Matemática 2

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

**Data:** 6 de Abril de 2017 **Duração:** 1H

**Atenção:** Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas.

**1.** Mostre que $\lambda = 2$ é valor próprio da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e determine a sua multiplicidade geométrica. (15)

**Solução:**

A matriz $A$ admite $\lambda = 2$ como valor próprio se e só se o sistema $(A - 2I)\boldsymbol{u} = 0$ for indeterminado. A multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ será o grau de indeterminação desse sistema, que corresponde ao número de linhas que é possível anular depois de reduzir $A - 2I$ a uma matriz em escada.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neste caso foi possível anular 1 linha, pelo que o grau de indeterminação é 1, o mesmo acontecendo com a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$.

**2.** Mostre que a função $Q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy - 2xz$ nunca toma valores negativos. (15)

**Solução:**

Sendo $Q(x, y, z)$ uma forma quadrática nas variáveis $x, y, z$, basta mostrar que ela é definida positiva, ou semidefinida positiva. A matriz simétrica que representa $Q(x, y, z)$ e os respetivos menores principais primários são dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \;\; \Delta_3 = |A| = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

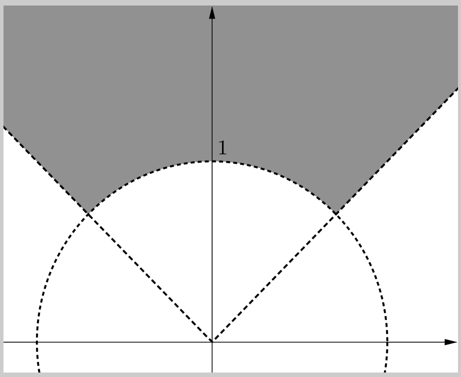
Verificando-se que $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 > 0$, concluímos que a matriz $A$, assim como a forma quadrática $Q(x,y,z)$, são definidas positivas. Fica assim demonstrado que $Q$ não toma valores negativos.

**3.** Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{y\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{y-|x|}}$.

(a) Determine analiticamente o domínio de $f$, $D_f$, e represente-o graficamente. (10)

**Solução:**

$$\begin{aligned} D_f =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2-1 > 0) \wedge (y-|x| \geq 0) \wedge (\sqrt{y-|x|} \neq 0)\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 > 1) \wedge (y > |x|)\} \end{aligned}$$



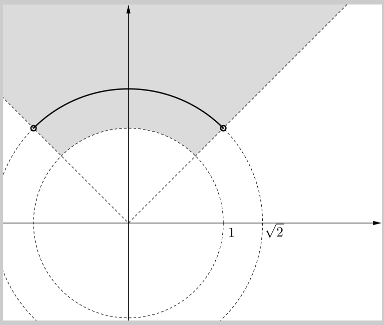

(b) Determine, analitica e geometricamente, a curva de nível zero de $f$, dada por $C_0 = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = 0\}$. (10)

**Solução:**

Devemos determinar os pontos de $D_f$ que satisfazem a equação $f(x,y) = 0$. Se $(x,y) \in D_f$ tem-se

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y\ln(x^2+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x^2+y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2$$

Deste modo, $C_0 = \{(x,y) \in D_f : x^2+y^2 = (\sqrt{2})^2\}$. Graficamente, a curva de nível pedida é a linha mais carregada na figura seguinte.




(c) Determine o interior e a fronteira de $D_f$. Averigue se $D_f$ é compacto. (10)

**Solução:**

$$\begin{aligned}
\text{Int}(D_f) =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1 \wedge y > |x|\} \\
\text{Fr}(D_f) =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge y \geq |x|\} \\
& \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \wedge x^2+y^2 \geq 1\} \\
\text{Ad}(D_f) =& int(D_f) \cup Fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x| \wedge x^2+y^2 \geq 1\}
\end{aligned}$$

Uma vez que existem pontos da aderência que não pertencem ao conjunto (todos os pontos da fronteira) o conjunto **não é fechado**, pelo que não é compacto. Na verdade o conjunto também não é limitado, já que existem pontos de $D_f$ arbitrariamente distantes da origem, por exemplo os pontos de forma $(0,y), y > 1$.

**4.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & , y > x \\ kx - y & , y \leq x \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que $f$ é contínua em $(0,0)$. (20)

**Solução:**

O ponto $(0,0)$ está na parte do domínio correspondente ao segundo ramo, pelo que se tem $f(0,0) = k \cdot 0 - 0 = 0$. Assim a função será contínua nesse ponto se e só se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Além disso, como o domínio pode ser decomposto nos conjuntos disjuntos

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\} \text{ e } B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\},$$

aos quais o ponto $(0,0)$ é aderente, vemos que a função é contínua em $(0,0)$

se e só se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B_2}} f(x,y) = 0$$

ou seja, se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y>x}} \frac{(x-y)x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y\leq x}} (kx-y) = 0.$$

Ora, relativamente ao segundo limite, não havendo indeterminação, podemos concluir imediatamente que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (kx-y) = k\cdot 0 - 0 = 0$. Relativamente ao primeiro limite, como

$$\left|\frac{(x-y)x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \frac{|x-y|(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x-y|\sqrt{x^2+y^2} \underset{\substack{x\to 0\\y\to 0}}{\longrightarrow} 0,$$

o princípio de enquadramento garante que o mesmo também é zero. Deste modo concluímos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, o que mostra que realmente $f$ é contínua em $(0,0)$, tal como pretendíamos demonstrar.

(b) Determine $k$ de modo que exista a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. (10)

**Solução:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h}$$

Relativamente a este último limite, vemos que a expressão de $f(h,0)$ será diferente consoante se tome $h>0$ ou $h<0$. Concretamente,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\cdot\frac{(h-0)h^2}{\sqrt{h^2+0^2}}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{|h|} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kh}{h} = k.$$

Assim, a derivada proposta apenas existe no ponto $(0,0)$ se $k=0$.

**5.** Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e $F(x,y) = f(xy, x^2y^2)$. Verifique que (10)

$$x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

**Solução:**

Usando a regra da função composta para $f(u,v)$ com $u = xy,\ v = x^2y^2$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} =& \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+2xy^2\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial F}{\partial y} =& \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+2x^2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

deste modo,

$$\begin{aligned}x\frac{\partial F}{\partial x}-y\frac{\partial F}{\partial y} =& x\left(y\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+2xy^2\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)-y\left(x\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+2x^2y\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\ =& \cancel{xy\frac{\partial f}{\partial u}}+\cancel{2x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v}}-\cancel{xy\frac{\partial f}{\partial u}}-\cancel{2x^2y^2\frac{\partial f}{\partial v}}\\ =& 0.\end{aligned}$$