LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 31 / Janeiro / 2017 Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

1. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$, definida por

$$f(a,b,c) = \begin{bmatrix} a-b & a+b \\ c & a-c \end{bmatrix} \qquad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}.$$

(20) **a)** Mostre que f é uma aplicação linear.

(25) **b)** Defina base de um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e apresente uma base para $Im\,(f)$.

2. Considere as seguintes afirmações:

(15) **a)** Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ e o seu polinómio característico é $p(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$ então A é invertível.

(20) **b)** Se A, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e A é invertível então ou A-B e I_n - BA^{-1} são ambas invertíveis ou são ambas não invertíveis.

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta para justificar cada resposta.

3. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$.

(20) **a)** Calcule os valores próprios de M.

(25) **b)** Existe uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores próprios de M ? Porquê?

4. Considere o subespaço F = < (1, 2, 0, 1), (-2, 0, -1, 1), (-10, 12, -8, 14) > $\subseteq \mathbb{R}^4$.

(20) **a)** Defina dimensão de um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e calcule a dimensão de F.

(25) **b)** Mostre que B = ((7, -2, 4, -5), (19, 6, 8, -5)) é uma base de F.

(30) **c)** Determine um subespaço G $\subset \mathbb{R}^4$, de dimensão 1, tal que F $\cap$ G = $\{\mathbf{0}\}$. Justifique a sua opção.