Época Normal: 21 de janeiro de 2021

Nota prévia: aqui apenas apresento os resultados finais; mas notem que no exame as respostas devem estar devidamente justificadas;

1.a) $\beta \neq 2\alpha$ sistema possível determinado;
$\beta = 2\alpha$ e $\beta = 3$ ($\alpha = 3/2$) sistema possível indeterminado;
$\beta = 2\alpha$ e $\beta \neq 3$ sistema impossível;

1.b)i. $\beta = 2\alpha$;

1.b)ii. $\beta \neq 2\alpha$;

1.b)iii. $\beta \neq 2\alpha$;

2.a) Deverá começar por descrever o subespaço F através de um conjunto de equações e obter
$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = 4a - 2b\}$.
Assim $F \cap G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c = 4a - 2b \wedge c = a + b\}$ e obtemos por fim que uma base de $F \cap G$ é, por ex, $((1, 1, 2))$;

2.b) Base de G é por ex, $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$; $dim(F + G) = 3$;

3. 48 (deveriam ir justificando cada passo que faziam)

4.a) Por exemplo: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 3)\}$;

4.b) Não é injectiva; (ou mostravam que $Nuc\, f \neq \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$ ou usavam a dimensão da $Im\, f$ para mostrar que dimensão de $Nuc\, f \neq 0$);

4.c) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, b.c_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; para calcular imagem do vetor pedido fazer $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, b.c_{\mathbb{R}^3}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

5.a) valores pps $k, -1$ e 3; se $k \neq 3$ e $k \neq -1$ então$m.a(k) = m.a(3) = m.a(-1) = 1$; se $k = 3$ então $m.a(3) = 2$ e $m.a(-1) = 1$; se $k = -1$ então $m.a(-1) = 2$ e $m.a(3) = 1$;

5.b) A_3 é diagonalizável (calcular $m.g(3)$ e verificar que é 2;)

6.a) verificar as condições para ser subespaço vetorial;
mostrar que $W = < \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} >$ e q estes vetores são l.i;

6.b) Dois e.v são isomorfos sse forem da mesma dimensão; como dimensão de W é 3 então será $k = 3$;

7.a) Deveria começar por escrever a definição de matriz A diagonalizável; Daí, utilizando o facto de se 2 matrizes são iguais as suas transpostas tb são, concluía que A^T seria semelhante a D^T; observava em seguida que, sendo D matriz diagonal $D^T = D$ e logo concluía que A^T é semelhante a D; depois, manipulando as 2 igualdades (a que tem de A ser semelhante a D e a que tem de A^T ser tb semelhante a D) chegaria a uma expressão, que lhe permitiria concluir que A é semelhante a A^T;

7.b) Manipulando a expressão dada concluíam facilmente que $A^T A = I_n$; passando da igualdade de matrizes à igualdade de determinantes e aplicando algumas prop dos determinantes concluíam que $|A|^2 = 1$ e logo a 1ª parte do ex; pegando novamente na expressão dada, passando a igualdade incial de matrizes para uma igualdade de determinantes e notanto que $|A^T + I_n| = |(A^T + I_n)^T| = |A + I_n|$ obteriam $|A + I_n| = |A + I_n|.|A|$; passando todos os valores para o 1º membro e pondo em evidência $|A + I_n|$ concluiriam que, visto que $|A| \neq 1$, teriam que ter $|A + I_n| = 0$ e logo, -1 valor pp de A;