Análise Matemática II - 2020/2021

Sucessões de Funções e Séries Inteiras

1. Considere a sucessão de funções (f_n) definida por $f_n(x) = e^{-nx}$. Estude a convergência pontual/uniforme de (f_n) nos intervalos

$$(a)\ X = [0;1] \qquad (b)\ X = [1;2].$$

2. Considere a sucessão de funções definida em $X = [0;1]$ por $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
Mostre que (f_n) converge pontualmente mas não uniformemente.

3. Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a função definida em $X = [0;1]$ por $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

(a) Calcule $\lim \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_0^1 (\lim f_n(x))\,dx$.

(b) A sucessão (f_n) converge uniformemente em $X = [0;1]$?

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em $\mathbb{R}$.
Mostre que a sucessão (h_n) definida por

$$h_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

converge uniformemente em $X = \mathbb{R}$.

5. Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a função definida em $X = [0;1]$ por

$$f_n(x) = nx^n \ln(x) \text{ se } x \in]0;1] \text{ e } f_n(0) = 0.$$

(a) Calcule o limite pontual f de (f_n) no intervalo $[0;1]$.

(b) Estude as variações de $g_n = f_n - f$.

(c) Conclua quanto à convergência/não convergência uniforme de (f_n) para f.

6. Estude a convergência uniforme das seguintes séries de funções:

$$(a) \sum x^n e^{-nx^2}; \quad (b) \sum \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}.$$

7. Calcule, para $x > 0$, a soma $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$.

Sugestão: comece por considerar a série $\sum e^{-nx}$.

8. Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências e estude também a convergência nos extremos desses intervalos:

$$(a)\sum_{n\geq 1} n\,(x-2)^{n-1}\,; \quad (b)\sum_{n\geq 1}(n+1)^{-1/2}\,(x+1)^n\,; \quad (c)\sum_{n\geq 1}\binom{n+4}{5}x^{4n};$$

$$(d)\sum_{n\geq 1}\frac{1.3....\,(2n+1)}{2.4....\,(2n+2)}\frac{1}{n+1}\,(x-1)^n\,.$$

9. Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:

$$(a)\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}; \quad (b)\sum_{n\geq 1} nx^n; \quad (c)\sum_{n\geq 1} n^2x^n; \quad (d)\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n+1}\,(x-1)^{2n+1}\,; \quad (e)\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\,(x-1)^{n+1}\,.$$

10. Desenvolva a função $x \to \ln(x)$ em série de potências de $x-2$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

11. Desenvolva a função $x \to \dfrac{1}{x^2}$ em série de potências de $x+1$, indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.

12. Considere a função $f : x \to e^x$. Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma dessa série para todo o $x \in \mathbb{R}$.

13. Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $f(x) = a^x$, $a > 0$
(b) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$
(c) $f(x) = \cos x$.

14. Desenvolva em série de MacLaurin a função $\log\left(1 + x^3\right)$ e justifique que a função tem um mínimo no ponto $x = 0$.

15. Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2\log(x^2),$$

indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

16. Desenvolva em série de potências de $x-2$ a função $x \to \dfrac{4}{3x}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.
Utilize o resultado obtido para determinar o valor de $f^{(17)}(2)$.

17. Desenvolva em série de MacLaurin a função $x \to 2^x + \dfrac{1}{2+x}$ e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.

18. Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 da função definida por

$$f(x) = \int_1^{u(x)} \ln(t)dt$$

centrado no ponto $a=2$, sabendo que a função u é de classe $C^2(\mathbb{R})$, tem por contradomínio o conjunto $[1,+\infty)$ e $u(2)=1$.

19. Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula dita do Binómio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n, \quad x \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$