LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciatura em MAEG
Análise Matemática II - 2019/2020

Exame de Época de Recurso, 3 de julho de 2020

Duração: 2 horas e 15 minutos

1. [2,5 valores] Mostre que para todo o $a \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+a^2}-|a|}{n^2}$$

é convergente.

2. [2,5 valores] Considere a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 x^n f(x)dx$$

onde f é uma função integrável e limitada[1] no intervalo $[0;1]$.

Mostre que a série $\sum u_n$ é absolutamente convergente.

(Sugestão: procure majorar $|u_n|$ pelo termo geral de uma série convergente.)

3. a. [1,5 valores] Dada (a_n) uma sucessão real, considere a série de potências $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de raio de convergência $R > 0$.

Mostre que se a série numérica $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ for absolutamente convergente então $S(x)$ converge uniformemente em $[-R;R]$.

b. [2,0 valores] Utilize a alínea anterior para mostrar que a série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{5^n(n+2)^2}x^n$ converge uniformemente no intervalo $[-5;5]$.

[1] Isto é, existe $M > 0$ tal que $\forall x \in [0;1], |f(x)| \leq M$.

4. [1,5 valores] Considere no espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ uma sucessão (u_n) convergente. Seja $L = \lim u_n$ e seja $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de todos os valores tomados pela sucessão.

Mostre que se $L \notin U$ então $L \in fr(U)$.

5. Considere a função definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{1 - \sqrt{|x-y| - 1}}{e^{\sqrt{1-x^2-y^2}}}.$$

a.[1,5 valores] Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.

b.[1,0 valores] Atribua um valor lógico à proposição

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in D,\ |f(x,y)| \leq k$$

justificando convenientemente.

6. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 & \text{se } x + y = 1 \\ 2x - 4y & \text{se } x + y \neq 1 \end{cases}.$$

a.[1,0 valores] Averigúe segundo que direções existe a derivada direcional de f no ponto $(1,0)$.

b.[1,0 valores] Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(1,0)$.

c.[1,0 valores] Estude a continuidade de f no seu domínio.

7. [2,0 valores] Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(-1) = f(0) = 0$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \int_x^{x+y^2+1} f(t)dt.$$

Mostre que $(-1,0)$ é um ponto crítico de g.

8. Seja $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira.

a. [1,5 valores] Mostre que a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = e^{h(z)}$$

verifica as condições de Cauchy-Riemann em todo o plano complexo[2].

b. [1,0 valores] Deduza da alínea anterior que f é uma função inteira e mostre que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f'(z) = h'(z)e^{h(z)}.$$

[2] Comece naturalmente por introduzir as funções $u = Re(h)$ e $v = Im(h)$