LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciatura em MAEG
Análise Matemática II - 2019/2020

Exame Modelo, 23 de maio de 2020

Duração: 2 horas e 30 minutos

1. [1,5 valores] Mostre que a série $\sum(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ é semiconvergente.

2. Sejam a, b, c três números reais tais que $a+b+c=0$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de limite nulo. Considere a sucessão de termo geral $u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$.

a. [1,5 valores] Mostre que para todo o $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = a(v_1+v_2) + bv_2 + bv_{N+1} + c(v_{N+1}+v_{N+2}).$$

b. [1,0 valores] Utilizando a alínea anterior mostre que a série $\sum u_n$ é convergente e explicite a respetiva soma.

3. [2,0 valores] Mostre que a função

$$f \,:\, x \in \mathbb{R} \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{x^2+n^4}}$$

está bem definida e é contínua.

4. a. [1,0 valores] Determine o intervalo de convergência I da série inteira

$$\sum \frac{n(-1)^n}{3^n}(x+1)^n.$$

b. [1,5 valores] Calcule a soma da série da alínea anterior para todo o $x \in I$.

5. [2,0 valores] Considere o conjunto $\mathcal{C}$ das funções contínuas no intervalo $[0;1]$. Mostre que a aplicação d definida em $\mathcal{C}^2$ por

$$d(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| \,:\, x \in [0;1]\}$$

é uma distância sobre $\mathcal{C}$ e, sendo $h : x \to x$, mostre que h^2 pertence à bola centrada em h e de raio $r = \frac{1}{4}$.

6. [2,0 valores] Considere a função definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+4y^2-1}}.$$

Determine o domínio D de f, represente-o geometricamente e indique justificando se D é um conjunto aberto.

7. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3}{x^2+5y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. [1,5 valores] Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$.
b. [1,5 valores] Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

8. [2,0 valores] Determine e classifique os pontos críticos das função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = 3 + x^2 + y^2 - 2x^2y.$$

9. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = xy + 3x - y.$$

a. [1,0 valores] Mostre que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

b. [1,5 valores] Determine todas as funções $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $f = u + iv$ é inteira.