Tópicos de Investigação Operacional

Época Normal

Data: 20/06/2023
Ano letivo 2022/2023

Tópicos de uma resolução incompleta

1. (a) Modelo P/P/2/+∞ com $\lambda = 15$, $\mu = 20$. Temos $\rho = \frac{15}{20} = 0.75 < 1$, logo podemos usar o modelo.

   i. Queremos calcular o p_0.

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right]^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^2}{2!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{2}}\right)\right]^{-1} = \left[1 + 0.75 + \frac{0.75^2}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{0.75}{2}}\right)\right]^{-1} = 0.45$$

   ii. Queremos calcular o L_q.

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 = \frac{\rho^3}{(2-\rho)^2} \times 0.45 = 0.12$$

   iii. Queremos calcular o $W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}}$. Como não temos capacidade no sistema, $\lambda_{eff} = \lambda = 15$. Ora, $L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = L_q + \rho = 0.87$. Assim,

$$W_s = \frac{0.87}{15} = 0.06 \text{ horas} \implies 3.6 \text{ minutos.}$$

   (b) Entidades: Clientes e Servidores.

Figura 1: Diagrama de ciclo de vida dos clientes.

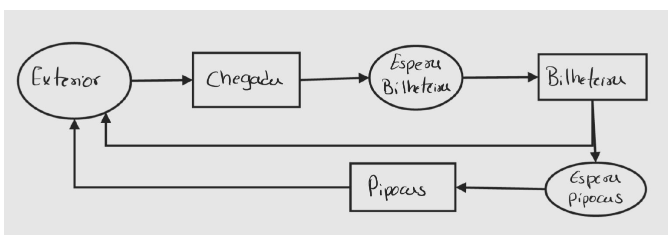
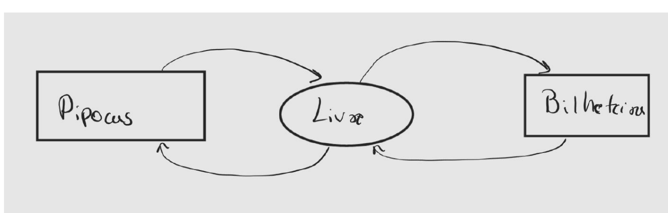


Figura 2: Diagrama de ciclo de vida dos servidores.



2. (a) Modelo determinístico como ponto de encomenda e unidade de tempo = 1 dia. Dados do problema: $D = 15, c = 0.9, h = 0.1 \times 0.9 = 0.09$ e $L = 2$.

   i. Sabemos que $Q^* = 600$. Logo,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}} \iff 600 = \sqrt{\frac{2 \times 15 \times K}{0.09}} \iff K = \frac{600^2 \times 0.09}{2 \times 15} = 1080$$

   ii. Temos $T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{600}{15} = 40$. Como $L < T^*$, vem que $P_e^* = DL = 15 \times 2 = 30$.

$$\frac{1}{T^*} = 0.025 \text{ encomendas dia} \implies 30 \times 0.025 = 0.75 \text{ encomendas mês}$$

$$CTUT(Q^*) = \frac{KD}{Q^*} + cD + \frac{hQ^*}{2} = \frac{1080 \times 15}{600} + 0.9 \times 15 + \frac{0.09 \times 600}{2} = 67.50 \text{ dia} \implies 67.50 \times 30 = 2025 \text{ mês}$$

(b) Encomenda:

Modelo determinístico básico com unidade de tempo = 1 semana. Dados do problema: $D = 75, c = 0.50, h = 1.5$ e $K = 5$.

Produção própria:

Modelo determinístico sem reposição instantânea com unidade de tempo = 1 semana. Dados do problema: $D = 75, R = 100, h = 1.5$ e $K = 10$.

   i. Modelo determinístico sem reposição instantânea com $c = 0.4$.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{R}{R-D}} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 75}{1.5}}\sqrt{\frac{100}{100-75}} = 63.25 \implies 63 \text{ palmiers}$$

$$I_{max} = Q^*\left(1 - \frac{D}{R}\right) = 63.25\left(1 - \frac{75}{100}\right) = 15.81 \implies 16 \text{ palmiers}$$

   ii. Queremos determinar o custo unitário de produção (c_p) de forma a que o custo total por unidade de tempo da produção própria ($CTUT(Q_p^*)$) seja inferior ao custo total por unidade de tempo da encomenda à fábrica ($CTUT(Q_f^*)$).

$$CTUT(Q_p^*) < CTUT(Q_f^*) \iff \sqrt{2h_pK_pD}\sqrt{\frac{R-D}{R}} + c_pD < \sqrt{2h_fK_fD} + c_fD$$

$$\iff \sqrt{2 \times 1.5 \times 10 \times 75}\sqrt{\frac{100-75}{100}} + c_p \times 75 < \sqrt{2 \times 1.5 \times 5 \times 75} + 0.5 \times 75$$

$$\iff 75c_p < 47.32$$

$$\iff c_p < \frac{47.32}{75} = 0.63$$

(c) Modelo estocástico com um único período. Dados do problema: $X \sim Exp(\frac{1}{280}), h = 0.9 - 0.4 = 0.5, p = 0.5$.

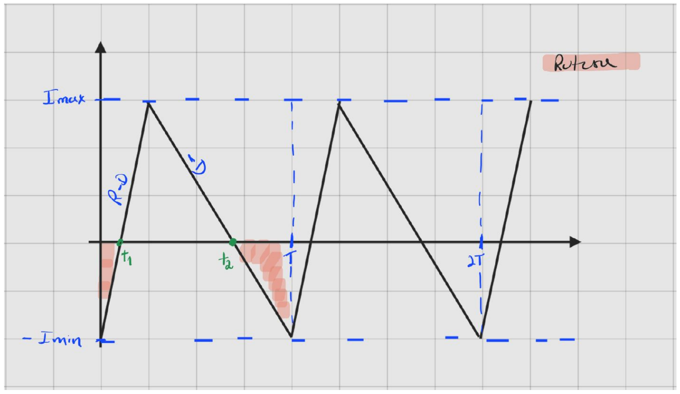
$$F_X(Q^*) = \frac{p}{p+h} \iff 1 - e^{-\frac{Q^*}{280}} = \frac{0.9}{0.9+0.5}$$

$$\iff e^{-\frac{Q^*}{280}} = 0.36 \iff -\frac{Q^*}{280} = ln(0.36) \iff Q^* = 286.06 \implies \text{Levar para a feira 286 macarons}$$

.

3. Fazendo o esboço do gráfico do modelo determinístico básico com vendas diferidas e rutura permitida verificamos que existe rutura nos triângulos pintados.

Figura 3: Esboço do gráfico



O nível médio de rutura durante o ciclo de encomenda é

$$\frac{1}{T}\left(\frac{t_1 \times I_{min}}{2} + \frac{(T-t_2)\times I_{min}}{2}\right).$$

Para calcular o t_1 e o t_2 precisamos de deduzir as retas de reabastecimento e de procura.

- Reta do reabastecimento: $I_R(t) = (R-D)t - I_{min}$
- Reta da procura: $I_P(t) = -Dt + Q - I_{min}$

Assim,

$$t_1 : I_R(t_1) = 0 \implies t_1 = \frac{I_{min}}{R-D}$$

$$t_2 : I_P(t_2) = 0 \implies t_2 = \frac{Q - I_{min}}{D}$$

Ora, relembrando que $T = \frac{Q}{D}$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\left(\frac{\frac{I_{min}}{R-D}\times I_{min}}{2} + \frac{(T - \frac{Q-I_{min}}{D})\times I_{min}}{2}\right)\\
=&\frac{1}{2T}\left(\frac{I_{min}^2}{R-D} + \frac{Q-Q+I_{min}}{D}\times I_{min}\right)\\
=&\frac{1}{2T}\left(\frac{DI_{min}^2 + (R-D)I_{min}^2}{D(R-D)}\right)\\
=&\frac{D}{2Q}\left(\frac{RI_{min}^2}{D(R-D)}\right) = \frac{1}{2Q}\left(\frac{RI_{min}^2}{R-D}\right)
\end{aligned}$$

Assim, a componente da função do custo total por unidade de tempo associada ao custo de rutura é $\frac{p}{2Q}\left(\frac{RI_{min}^2}{R-D}\right)$.