NOTAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

JOÃO LOPES DIAS

Resumo. Notas para a UC *Análise Complexa e Equações Diferenciais* do 2º ano da licenciatura em MAEG (ISEG-Universidade de Lisboa). Assume-se como requisitos prévios os conteúdos das UCs *Álgebra Linear*, *Análise Matemática 1, 2 e 3*. Em particular, espaços e transformações lineares, cálculo diferencial e integral em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{C}$.

Conteúdo

Date: 8 de junho de 2023.

1. Introdução

Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) é uma equação que relaciona uma função a uma variável com as suas derivadas.

Dada uma função diferenciável $y = (y_1(t), \dots, y_d(t))$ definida para a variável t num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}^d$, a sua derivada é representada numa qualquer das seguintes formas:

$$y'(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t) = Dy(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_d'(t) \end{bmatrix}.$$

Generalmente simplificamos as notações escrevendo apenas $y' = \dot{y} = \frac{dy}{dy} = Dy$, sem referência à variável. Para as derivadas de ordem n usamos as notações:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n} = D^n y.$$

Nos casos $n = 2$ e $n = 3$ usamos também y'' e y''', respectivamente.

Exemplo 1.1.

(1) $y' = 3y^2 \sin(t + y)$.
(2) $y''' = e^{-y} + t + y''$.
(3) $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

As equações diferenciais aparecem em todas as áreas científicas como ferramenta de modelação matemática de muitos fenómenos.

Exemplo 1.2.

(1) A equação de Malthaus, $y' = ay$, descreve a evolução de uma população $y(t)$ ao longo do tempo t. O modelo assume apenas que a taxa de variação $y'(t)$ é proporcional à população no mesmo instante de tempo, onde a é uma constante.
(2) O exemplo anterior pode ser melhorado se pensarmos que com o aumento da população surge competição pelos mesmos recursos, levando a uma diminuição da taxa de crescimento. A equação logística incorpora assim um termo extra:

$$y' = ay - by^2,$$

onde b é outra constante.
(3) Quando introduzimos uma outra população predadora, podemos considerar o modelo de Lotka-Volterra dado por:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_1y_2 \\ y_2' = -cy_2 + dy_1y_2, \end{cases}$$

onde $a, b, c, d > 0$.

A *ordem de uma EDO* é a maior ordem das derivadas da função que aparecem na equação. A *dimensão da EDO* é a dimensão d de $y(t) \in \mathbb{R}^d$.

As *soluções da EDO* são funções que satisfazem a EDO. Por exemplo, a função $y(t) = 2\sin t - \frac{1}{3}\cos(2t)$ satisfaz $y'' + y = \cos(2t)$.

Um *problema de valor inicial* (PVI) consiste em obter as soluções de uma EDO de ordem $k \geq 1$ que verifiquem também as chamadas condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots \quad y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1},$$

onde $y_0, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^d$ são dados. Este é o nosso principal objectivo. Por exemplo, é simples verificar que

$$y'' = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1,$$

implica que $y(t) = t^2/2 - t + 1$. Como a generalidade dos casos envolve EDO's mais complicadas, queremos encontrar técnicas que nos permitam obter soluções.

1.1. **Redução a EDOs de 1ª ordem.** Considere a EDO de ordem d em dimensão 1 dada por

$$y^{(d)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(d-1)}),$$

onde f é uma função entre o seu domínio em $\mathbb{R}^d$ com valores em $\mathbb{R}$. Fazendo a seguinte escolha de funções

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots \quad y_d = y^{(d-1)},$$

podemos rescrever a EDO em 1ª ordem mas em dimensão d:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{d-1}' \\ y_d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_d \\ f(t, y_1, \ldots, y_d) \end{bmatrix}$$

Esta é a abordagem mais prática para tratar EDOs de ordens maiores que 1.

Exemplo 1.3. A equação de 2ª ordem $y'' + y' - y = 0$ pode ser transformada numa de 1ª ordem:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.4. Reduza uma EDO de ordem d em dimensão n a uma EDO de ordem 1 com dimensão nd.

2. EDO's 1ª ordem em dimensão 1

Começamos com o caso de EDO's de 1ª ordem em dimensão $d = 1$. Vamos tentar resolver o PVI:

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

onde f é uma função integrável e $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ definem a condição inicial. Esta é uma tarefa complicada, muitas vezes impossível, mas para os casos seguintes temos métodos que resultam.

2.1. **Equações separáveis.** Consideremos o PVI

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)}, \qquad y(t_0) = y_0,$$

onde g e h são funções integráveis e H é a primitiva de h, i.e. $H' = h$. Note agora que pela regra da cadeia,

$$(H \circ y)'(t) = h(y(t))\, y'(t) = g(t).$$

Se a derivada de $H \circ y$ é igual a g, então podemos integrar entre t_0 e t usando a regra de Barrow:

$$\int_t^{t_0} (H \circ y)'(s)\, ds = H \circ y(t) - H \circ y(t_0) = \int_{t_0}^t g(s)\, ds$$

(tivemos que mudar as letras das variáveis de integração para não confundir com os limites de integração). Obtemos assim a solução $y(t)$ definida implicitamente pela equação

$$H(y(t)) = H(y_0) + \int_{t_0}^t g(s)\, ds.$$

Conhecendo H podemos ter a chance de obter uma fórmula explícita para a solução $y(t)$. Mesmo que tal não seja possível, a equação acima já só depende de y e não da sua derivada.

Observação 2.1. Abusando da notação, podemos obter a fórmula anterior por um método prático e útil. Comece por escrever

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)},$$

não sentido remorsos em chegar a

$$h(y)\, dy = g(t)\, dt.$$

Integrando ambos os lados

$$\int_{y_0}^y h(r)\, dr = \int_{t_0}^t g(s)\, ds,$$

chegamos outra vez a

$$H(y) - H(y_0) = \int_{t_0}^t g(s)\, ds.$$

Esta é a forma mais prática de recordarmos esta técnica.

Os exemplos seguintes esclarecem a utilidade deste método.

Exemplo 2.2. Quando $h(y) = 1$, o problema acima reduz-se a

$$y' = g(t), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Temos então $dy = g(t)\,dt$. Integrando ambos os lados,

$$\int_{y_0}^{y} dr = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds,$$

obtemos

$$y - y_0 = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds.$$

Facilmente se verifica que $y' = g(t)$ pelo teorema fundamental do cálculo e que $y(t_0) = y_0$, indicando que y é solução do PVI.

Exemplo 2.3. *Equação diferencial linear homogénea de 1ª ordem*: Sendo a uma função integrável, considere o PVI

$$y' = a(t)\,y, \qquad y(t_0) = y_0.$$

Assim, $dy/y = a(t)\,dt$ e

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{r}\,dr = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds.$$

Então,

$$\ln r|_{y_0}^{y} = \ln y - \ln y_0 = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

e a solução é

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}.$$

Exemplo 2.4. $y' = \frac{t^2}{y^2}$, $y(t_0) = y_0$. Novamente, $y^2\,dy = t^2\,dt$ e

$$\int_{y_0}^{y} r^2\,dr = \int_{t_0}^{t} s^2\,ds.$$

Finalmente,

$$y^3 - y_0^3 = t^3 - t_0^3,$$

sendo a solução dada por

$$y(t) = \sqrt[3]{y_0^3 + t^3 - t_0^3}.$$

Exemplo 2.5. $e^y y' - t - t^3 = 0$, $y(t_0) = y_0$. Logo,

$$\int_{y_0}^{y} e^r\,dr = \int_{t_0}^{t} (s + s^3)\,ds$$

e

$$y(t) = \ln\left[e^{y_0} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \left(\frac{t_0^2}{2} + \frac{t_0^4}{4}\right)\right].$$

Podemos ter de fazer uma substituição de variáveis para simplificar a equação, como no exemplo seguinte.

Exemplo 2.6. $y' = y^2 + (1-2t)y + t^2 - t + 1$, $y(0) = 1$. Note que

$$\left(y + \frac{1-2t}{2}\right)^2 = y^2 + (1-2t)y + t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$y' = \left(y - t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Substituindo $x(t) = y(t) - t + 1/2$, temos $x' = y' - 1$. Então obtemos uma nova EDO

$$x' = x^2 - \frac{1}{4},$$

com condição inicial $x(0) = y(0) - 0 + 1/2 = 3/2$. Temos agora uma equação separável que desenvolvemos para

$$\int_{3/2}^{x} \frac{1}{r^2 - \frac{1}{4}}\, dr = \int_0^t 1\, ds.$$

Note que

$$\frac{1}{r^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{r - \frac{1}{2}} - \frac{1}{r + \frac{1}{2}}.$$

Integrando,

$$\int_{3/2}^{x} \frac{1}{r^2 - \frac{1}{4}}\, dr = \log 2 \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = t$$

chegamos à solução

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{e^t + 2}{4 - 2e^t}.$$

Finalmente,

$$y(t) = x(t) + t - \frac{1}{2}.$$

Repare que se $t = \log 2$ a solução não está definida. Esta questão é fundamental e será tratada na secção 3 sobre a existência e unicidade de soluções.

2.2. **Equações exactas.** Uma EDO é *exacta* se existe uma função $\phi(t, y)$ tal que

$$y' = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y)}.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(t, y(t)) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = 0.$$

Neste caso temos que $\phi(t, y(t))$ é constante para todo o t, ou seja

$$\phi(t, y(t)) = \phi(t_0, y_0).$$

Conhecendo ϕ podemos ter a chance de obter uma fórmula explícita para a solução $y(t)$. Mesmo que tal não seja possível, a equação acima já só depende de y e não da sua derivada.

Observação 2.7. As equações separáveis são um caso particular das equações exactas com $\phi(t,y) = -\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds + \int_{y_0}^{y} h(r)\,dr$.

Exemplo 2.8. Considere a EDO

$$1 + \cos(t+y) + \cos(t+y)\,y' = 0.$$

Para verificar que é exacta, tentamos encontrar uma função ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 1 + \cos(t+y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \cos(t+y).$$

Primitivando a primeira equação relativamente à variável t, temos a forma geral de ϕ dada por

$$\phi(t,y) = t + \sin(t+y) + g(y),$$

onde g é uma função que não depende de t. Usando a segunda equação, temos que

$$\cos(t+y) + g'(y) = \cos(t+y).$$

Logo, g é apenas uma constante que podemos escolher igual a zero. Ou seja, a EDO é exacta, com função $\phi(t,y) = t + \sin(t+y)$, e a solução $y(t)$ é dada por

$$t + \sin(t+y) = t_0 + \sin(t_0 + y_0).$$

Isto é,

$$y(t) = -t + \arcsin\left[-t + t_0 + \sin(t_0 + y_0)\right].$$

O resultado seguinte permite identificar mais rapidamente se uma EDO é exacta ou não.

Proposição 2.9. *A EDO $M(t,y) + N(t,y)\,y' = 0$, onde M, N são funções de classe C^1, é exacta sse*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sendo a EDO exacta, existe $\phi(t,y)$ tal que $M = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ e $N = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. Logo, ϕ é C^2 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

($\Leftarrow$) Seja $\phi(t,y) = \int M(t,y)\,dt$. Logo, $\frac{\partial \phi}{\partial t} = M$. Por outro lado, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt = \int \frac{\partial N}{\partial t}\,dt = N$. □

2.3. **Factor integrante.** Considere uma função diferenciável μ. Comece por observar que

$$(\mu y)' = \mu' y + \mu y'.$$

Se multiplicarmos a EDO $y' = f(t, y)$ por μ obtemos

$$\mu y' = \mu f(t, y)$$

Usando a observação anterior chegamos a

$$(\mu y)' = \mu' y + \mu f(t, y).$$

O lado esquerdo desta equação é imediatamente integrável. Dependendo de f, poderemos ter a sorte de encontrar uma função μ que simplifique consideravelmente o lado direito da equação, transformando-a numa EDO separável ou exacta. A função μ é chamada de *factor integrante*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.10. *Equação diferencial linear não homogénea de 1ª ordem*: Dadas duas funções a e b integráveis,

$$y' = a\,y + b,$$

multiplicando por μ, podemos rescrever a EDO como

$$(\mu y)' = (\mu' + \mu a)y + \mu b.$$

Note agora que se μ for escolhida tal que $\mu' + \mu a = 0$, a equação fica consideravelmente mais fácil de resolver. Ora esta é uma equação diferencial linear homogénea de 1ª ordem em μ cuja solução já é conhecida (ver Exemplo 2.3):

$$\mu(t) = \mu(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

Finalmente, podemos integrar a EDO multiplicada pelo factor integrante μ, chegando a

$$\mu(t)y(t) - \mu(t_0)y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\, ds.$$

Logo,

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\mu(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\, ds\right].$$

Para $\mu(t_0)$ basta escolher um valor diferente de 0, por exemplo 1.

Exemplo 2.11. A seguinte EDO não é exacta

$$\frac{y^2}{2} + 2y\, e^t + (y + e^t)y' = 0.$$

No entanto vamos multiplicá-la por um factor integrante $\mu(t)$ de forma a obtermos uma equação exacta. Assim, obtemos

$$\mu\, M + \mu\, N\, y' = 0.$$

onde $M = \frac{y^2}{2} + 2y\,e^t$ e $N = y + e^t$. Escolhendo μ tal que

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

já temos uma equação exacta com $\phi(t,y) = \int(\mu M)dt = \mu\int N\,dy$. Chegamos então a

$$\mu(y+2e^t) = \mu'(y+e^t) + \mu e^t.$$

O factor integrante tem assim de verificar

$$\mu' = \mu,$$

ou seja, $\mu(t) = e^t$. Em conclusão, para a condição inicial $y(0) = 1$,

$$\phi(t,y) = e^t\left(\frac{y^2}{2} + ye^t\right) = \frac{3}{2}$$

ou

$$y(t) = -e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 3e^{-t}}.$$

A solução será $y(t) = -e^t + \sqrt{e^{2t} + 3e^{-t}}$ pois a outra não verifica a condição inicial.

3. Problemas de valor inicial PVI

Até aqui vimos técnicas que nos permitem obter soluções do PVI. O exemplo seguinte mostra que é necessário restrigir as EDO's de forma a garantirmos uma solução única.

Exemplo 3.1. Considere o PVI:

$$y' = 3y^{2/3}, \qquad y(0) = 0.$$

A função $y(t) = 0$ é uma solução óbvia. Mas há mais! Por exemplo, $y(t) = t^3$, $t \geq 0$. De facto há infinitas. Para quaisquer $a \leq 0 \leq b$ a função seguinte é solução:

$$y(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a \\ 0, & a \leq t \leq b \\ (t-b)^3, & t > b. \end{cases}$$

Exercício 3.2. Considere o PVI:

$$y' = \sin(2t)\sqrt[3]{y}, \qquad y(0) = 0.$$

Verifique que as seguintes funções são soluções:

- $y(t) = 0$.
- $y(t) = \sqrt{\frac{8}{27}}\sin^3 t$.
- $y(t) = -\sqrt{\frac{8}{27}}\sin^3 t$.

Exercício 3.3. Considere o PVI, $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$. Determine as suas soluções.

O Teorema 3.11 abaixo apresenta condições para que exista uma única solução de um PVI de 1ª ordem para qualquer dimensão d na forma

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

onde $y(t) = (y_1(t), \dots, y_d(t))$ e $f(t, y) = (f_1(t, y), \dots, f_d(t, y))$. Necessitamos primeiro de introduzir alguns aspectos técnicos para podermos enunciar o resultado.

3.1. **Preliminares.** Em $\mathbb{R}^d$ vamos considerar a seguinte norma:

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le d} |x_i|.$$

Uma bola aberta centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^d$ com raio $r > 0$ [1] é representada por

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| < r\}.$$

O fecho $\overline{B_r(x_0)}$ corresponde aos pontos que verificam $\|x - x_0\| \le r$.

Lema 3.4. *Seja* $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ *uma matriz* $d \times d$ *e* $x \in \mathbb{R}^d$. *Então,* $\|Ax\| \le d \max_{i,j} |a_{i,j}| \, \|x\|$.

Demonstração. Note que a i-ésima coordenada de Ax é $(Ax)_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j} x_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \max_{i=1,\dots,d} \left| \sum_{j=1}^d a_{i,j} x_j \right| \\
&\le \max_i \sum_{j=1}^d |a_{i,j} x_j| \\
&\le \max_i d \max_{j=1,\dots,d} |a_{i,j}| \, |x_j| \\
&\le d \max_{i,j} |a_{i,j}| \, \max_j |x_j|.
\end{aligned}$$

□

3.1.1. *Funções de Lipschitz.* Uma função $g\colon A \to \mathbb{R}^d$ definida num conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$, é *Lipschitz em* A se existe uma constante $L > 0$ tal que para qualquer par de pontos $x, y \in A$,

$$\|g(x) - g(y)\| \le L \|x - y\|.$$

[1] Para esta norma o nome "bola" não parece apropriado. Qual deverá ser o nome?

A menor constante L possível é chamada constante de Lipschitz. Isto é,

$$L = \sup_{x \neq y} \frac{\|g(x) - g(y)\|}{\|x - y\|}.$$

Exemplo 3.5. Seja $g(x) = x^{2/3}$ em $[0, 1]$. Então, pelo teorema do valor médio[2], dados $x, y \in [0, 1]$ diferentes, existe c entre x e y tal que

$$\left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right| = |g'(c)| = \frac{2}{3} |c^{-1/3}|.$$

Fazendo $x, y \to 0$ tem-se que $c \to 0$. Conclue-se assim que g não pode ser Lipschitz.

Exercício 3.6. Determine se a função $f(y) = y^2$ é Lispchitz em $\mathbb{R}$.

Exercício 3.7. Mostre que:

(1) Se g está definida num conjunto convexo compacto e é C^1, então é Lipschitz.
(2) Se g é Lipschitz, então é uniformemente contínua. Logo também é contínua.

Exercício 3.8. Indique uma função que seja:

(1) contínua, mas não uniformemente contínua.
(2) uniformemente contínua, mas não Lipschitz.
(3) Lipschitz, mas não C^1.

Exercício 3.9. Mostre que $f(t, y) = \sin(2t) \sqrt[3]{y}$ do Exercício 3.2 não é Lipschitz na segunda variável.

Exemplo 3.10. Considere a função $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dada por $g(x) = Ax$, onde $A = [a_{i,j}]_{i,j}$ é uma matriz $d \times d$. É uma função Lipschitz pois para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^d$ temos

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &= \|A(x - y)\| \\ &\leq d \max_{i,j} |a_{i,j}| \, \|x - y\|. \end{aligned}$$

Podemos tomar assim $L = d \max_{i,j} |a_{i,j}|$.

3.1.2. *Equação integral.* Se $y(t)$ é solução do PVI, ao integrarmos a EDO entre t_0 e t, usando a condição inicial, temos que cada componente $y_i(t)$ satisfaz a equação integral:

$$y_i(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, y(s)) \, ds, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

[2]Também chamado de teorema de Lagrange (note que há vários teoremas de Lagrange em diversos contextos da Matemática).

Vamos usar a notação seguinte para indicar um integral de uma função vectorial:

$$\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds = \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, y(s))\, ds, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_d(s, y(s))\, ds \right).$$

Assim, obtemos a equação integral vectorial:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Por outro lado, assumindo que f é contínua, se $y(t)$ é solução da equação integral acima e é contínua, pelo teorema fundamental do cálculo a derivada de y existe, é igual a $f(t, y(t))$ e é contínua (logo y é C^1). Além disso, $y(t_0) = y_0 + 0$, pelo que y é também solução do PVI.

Ou seja, para f contínua uma função y é solução do PVI sse é solução da equação integral.

3.2. **Teorema de existência e unicidade.** Seja $a, b > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Definimos o conjunto compacto e convexo

$$R_{a,b}(y_0) = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}$$

e consideramos uma função $f\colon R_{a,b}(y_0) \to \mathbb{R}^d$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$.

Teorema 3.11 (Existência e Unicidade)**.** *Se $f(t, y)$ é contínua em t e Lipschitz em y, então o PVI*

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução $y\colon [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 onde

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} \quad e \quad M = \max_{(t,y) \in R_{a,b}(y_0)} \|f(t, y)\|.$$

Exercício 3.12. Mostre que se f pode ser extendida a $[t_0 - \alpha, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)}$ com a mesma regularidade e o mesmo valor de M, então a solução existe e é única em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Exemplo 3.13. $y' = t^2 + e^{-y^2}$, $y(0) = 0$. Como $f(t, y) = t^2 + e^{-y^2}$ é uma função C^1 em $\mathbb{R}^2$, podemos tomar como domínio $R = [0, a] \times [-b, b]$ para quaisquer $a, b > 0$. Neste domínio f é Lipschitz. O máximo de $|f|$ em R é $M = a^2 + 1$. Pelo teorema existe uma única solução $y(t)$ em $[0, \alpha]$ com $\alpha = \min\{a, b/(a^2 + 1)\}$. Escolhemos $b = a(a^2 + 1)$ para termos $\alpha = a$. Como a pode ser arbitrariamente grande, a solução existe e é única em $[0, +\infty[$.

Exemplo 3.14. $y' = y^2$, $y(0) = 1$. A função $f(t, y) = y^2$ é Lispchitz em $[0, a] \times [1 - b, 1 + b]$ com $M = (1 + b)^2$. A única solução está assim bem definida em $[0, \alpha]$ com $\alpha = \min\{a, b/(1 + b)^2\}$. Como $b/(1 + b)^2 \leq 1/4$

para $b > 0$, só podemos concluir que a solução existe e é única em $[0, 1/4]$.

Corolário 3.15. *Seja $f\colon [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Se f é contínua em t e Lipschitz em y e*

$$M = \sup_{t\in[t_0,t_0+\alpha],y\in\mathbb{R}^d} \|f(t, y)\| < +\infty,$$

então existe uma única solução do PVI em $[t_0, t_0 + a]$.

Demonstração. Pelo teorema da existência e unicidade de soluções, existe uma solução única em $[t_0, t_0 + \alpha]$ com $\alpha = \min\{a, b/M\}$. Resta tomar $b \to +\infty$ uma vez que M é finito. □

A condição de f ser limitada no corolário anterior não é essencial. Podemos generalizar o teorema da existência e unicidade para funções que estão definidas para qualquer $y \in \mathbb{R}^d$ e que não são necessariamente limitadas.

Teorema 3.16. *Seja $f\colon [t_0, t_0+a]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Se f é contínua em t e Lipschitz em y, então existe uma única solução do PVI em $[t_0, t_0 + a]$.*

Exercício 3.17. * Prove o teorema anterior. (Sugestão: Refazer a demonstração do Teorema 3.11, notando que não é necessário usar o Lemma 3.22.)

Exemplo 3.18. $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$ em $\mathbb{R}^d$, onde A é uma matriz $d \times d$ com coeficientes em $\mathbb{R}$. Pelo Exemplo 3.10, $f(y) = Ay$ é Lipschitz em $\mathbb{R}^d$. Como f não depende de t, podemos assumir $a \to +\infty$. Assim, existe uma única solução em $[t_0, +\infty[$.

Observação 3.19. O famoso teorema de Peano assume apenas continuidade de f de forma a mostrar a existência de soluções. O Teorema 3.11 necessita da condição extra de f ser Lipschitz em y, mas garante também a unicidade. Ambos os resultados são interessantes, sendo a demonstração do teorema de Peano mais complicada. Consegue encontrar na demonstração abaixo o ponto onde necessitamos da condição de Lipschitz para provar a existência de soluções? Porque é que não funciona só para funções contínuas? Note que a parte da unicidade necessita da condição de Lipschitz. Os exemplos no início desta secção demonstram que não basta f ser contínua.

Observação 3.20. A unicidade de solução do PVI tem uma consequência importante: os gráficos das soluções de dois PVI's não se podem interesectar. De facto, caso houvesse intersecção num ponto t_1 de duas soluções $y(t)$ e $z(t)$, seriam soluções do PVI para a condição inicial $y(t_1) = z(t_1)$, logo seriam iguais.

3.3. **Demonstração do Teorema de existência e unicidade.**

3.3.1. *Iteradas de Picard.* Vamos tomar a sucessão de funções

$$y_n \colon [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$$
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds, \quad n \geq 1,$$

e a função constante $y_0(t) = y_0$. Estas são as chamadas iteradas de Picard, que veremos serem convergentes para uma solução da equação integral (equivalente ao PVI como vimos anteriormente).

Note que $y_0(t) = y_0$ é constante, logo C^1. Assim, $y_1'(t) = f(t, y_0)$ é contínua, sendo y_1 também C^1. Segue por indução que y_n é C^1 para qualquer n.

Exemplo 3.21. O PVI $y' = y$, $y(0) = 1$ define a equação integral $y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\, ds$. As iteradas de Picard são assim dadas por

$$y_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}.$$

Esta sucessão é conhecida e sabemos que converge para a solução do PVI, $y_n(t) \to e^t$.

3.3.2. *Convergência das iteradas de Picard.* Vamos primeiro estimar a variação das iteradas de Picard, para depois mostrarmos a convergência.

Lema 3.22. *Para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $n \in \mathbb{N}_0$,*

(1) $\|y_n(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)$.
(2) $(t, y_n(t)) \in R_{a,b}(y_0)$.

Demonstração. As proposições verificam-se trivialmente para $n = 0$. Usando indução, basta verificar que

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds \right\| \\
&= \max_i \left| \int_{t_0}^{t} f_i(s, y_{n-1}(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \max_i |f_i(s, y_{n-1}(s))|\, ds \\
&\leq M(t - t_0) \leq M\alpha \leq b
\end{aligned}$$

pois assumimos que $(t, y_{n-1}(t)) \in R_{a,b}(y_0)$. □

Seja

$$m = \max_{t \in [t_0, t_0 + \alpha]} \|f(t, y_0)\|.$$

Lema 3.23. *Para $t \in [t_0, t_0+\alpha]$ e $n \geq 1$,*

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq mL^{n-1}\frac{(t-t_0)^n}{n!}.$$

Demonstração. Pela habitual estimativa do integral, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| &= \max_i \left| \int_{t_0}^t [f_i(s, y_{n-1}(s)) - f_i(s, y_{n-2}(s))]\, ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t \max_i |f_i(s, y_{n-1}(s)) - f_i(s, y_{n-2}(s))|\, ds \\
&= \int_{t_0}^t \|f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))\|\, ds.
\end{aligned}$$

Como vimos acima, os pontos $(t, y_{n-1}(t)), (t, y_{n-2}(t)) \in R_{a,b}(y_0)$ para $t \in [t_0, t_0+\alpha]$. Podemos então usar a condição de Lipschitz de f relativamente à variável y, para obter

$$\|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq L\int_{t_0}^t \|y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)\|\, ds.$$

Esta desigualdade permite-nos agora chegar ao resultado por indução.

Note que

$$\|y_1(t) - y_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, y_0)\, ds \right\| \leq m(t-t_0)$$

o que verifica para $n=1$ a proposição do lema. Assumindo que também se verifica para n, $n \geq 2$, usando a desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| &\leq L\int_{t_0}^t mL^{n-1}\frac{(s-t_0)^n}{n!}\, ds \\
&\leq mL^n \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.24. *A série*

$$\sum_{n\geq 1}(y_n - y_{n-1})$$

converge absoluta e uniformente em $[t_0, t_0+\alpha]$.

Demonstração. Exercício. □

Finalmente, podemos mostrar que a sucessão de iteradas de Picard converge para uma função contínua.

Lema 3.25. *y_n converge uniformemente em $[t_0, t_0+\alpha]$ para uma função y contínua com $(t, y(t)) \in R_{\alpha,b}(y_0)$.*

Demonstração. É simples verificar que

$$y_n - y_0 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}).$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}).$$

Como a série converge uniformemente, o limite da sucessão y_n existe e é uma função contínua. Como para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ temos que os pontos $(t, y_n(t)) \in R_{\alpha,b}(y_0)$ e o conjunto $R_{\alpha,b}(y_0)$ é fechado, então o limite quando $n \to +\infty$ também estará dentro do conjunto. $\square$

3.3.3. *A função limite satisfaz a equação integral.* Obtivemos acima que

$$y(t) = \lim_{n\to+\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\, ds,$$

para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Passando o limite para dentro do integral (usando o teorema da convergência dominada) e para dentro dos argumentos de f (porque f é contínua), provamos que y satisfaz a equação integral, pelo que é solução do PVI e é C^1.

3.3.4. *A solução é única.* Suponha que temos duas soluções da equação integral:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, s \\ z(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, s. \end{aligned}$$

A diferença entre elas é estimada por

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds.$$

Como são soluções temos que $(t, y(t)), (t, z(t)) \in R_{a,b}(y_0)$ para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. A condição de Lipschitz aplica-se e implica que

$$\|y(t) - z(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|y(s) - z(s)\|\, ds.$$

O exercício seguinte mostra que $y(t) = z(t)$ para todo o $t \in [t_0, t_0+\alpha]$.

Exercício 3.26. * Seja $w\colon [t_0, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ tal que

$$0 \leq w(t) \leq L \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds$$

e $A = \max w$.

(1) Mostre que $w(t) \leq LA(t-t_0)$.
(2) Mostre que
$$w(t) \leq \frac{AL^2(t-t_0)^2}{2}.$$
(3) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,
$$w(t) \leq \frac{AL^n(t-t_0)^n}{n!}.$$
(4) Mostre que $w(t) = 0$.

4. Equações lineares com coeficientes constantes

Vamos representar o conjunto das matrizes $d \times d$ com coeficientes em A, onde A pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) por $\mathcal{M}_d(A)$. O subconjunto de $\mathcal{M}_d(A)$ formado pelas matrizes invertíveis é $\mathrm{GL}_d(A)$. A sigla significa "*General Linear group*".

Uma EDO linear é da forma
$$y' = A(t)y + b(t),$$
onde $A\colon I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $b\colon I \to \mathbb{R}^d$ são funções contínuas num intervalo I. Pelo Teorema 3.16, a solução $y\colon I \to \mathbb{R}^d$ existe e é única.

Quando a A é uma função constante, a equação linear $y' = Ay + b(t)$ é chamada de coeficientes constantes. Nesta secção apenas vamos tratar deste caso, deixando para a próxima o caso geral de coeficientes variáveis.

4.1. Caso homogéneo.

4.1. Caso homogéneo. O caso mais simples corresponde a $b = 0$, dando-se o nome de EDO linear homogénea com coeficientes constantes a
$$y' = Ay.$$
Podemos obter a solução do PVI correspondente usando as iteradas de Picard:
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0} Ay_{n-1}(s)\,ds, \qquad n \in \mathbb{N},$$
com $y_0(t) = y_0$.

Exercício 4.1. Mostre que
$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n y_0.$$

A solução é então dada por
$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$$

onde usámos a exponencial de uma matriz $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dada por

$$e^B = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B^n.$$

Do que vimos acima, o problema de determinar a solução de uma EDO linear autónoma homogénea reduz-se ao problema em Álgebra Linear de determinar a exponencial de uma matriz (ver apêndice). Note que nem todas as matrizes são diagonalizáveis, e.g.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Porém, todas são redutíveis à forma normal de Jordan, o que é suficiente para obtermos um método de cálculo da exponencial.

Exemplo 4.2.

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Esta matriz já está na forma canónica de Jordan. O PVI $y' = Ay$, $y(0) = (0, 1)$ tem assim solução

$$y(t) = e^{tA} y_0 = e^0 \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Considere o PVI tridimensional $y' = Ay$, $y(0) = (1, 1, 1)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. A matriz é diagonalizável e os correspondentes vectores próprios são $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -i)$ e $v_3 = (0, 1, i)$. Temos assim

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(1+i)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(1-i)} \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}.$$

(3) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios são 1 e 2, este último com multiplicidade algébrica 2. O valor próprio 1 tem multiplicidade geométrica

1, com vector próprio $u = (-1, 1, 1)$. O valor prório 2 tem multiplicidade 1 também, com vector próprio v satisfazendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} v = 0.$$

Ou seja, $v_3 = 0$ e $v_1 = -v_2$. Uma solução é $v = (1, -1, 0)$. O vector próprio generalizado w é solução de $(A - 2I)w = v$. Logo, $w = (0, 1, 0)$. Finalmente,

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com estas matrizes resolvemos o PVI $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, $y(t) = Se^{Jt}S^{-1}y_0$ onde

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(4) Considere a EDO de 2ª ordem dada por $ay'' + by' + cy = 0$, $y'(0) = y_0'$, $y(0) = y_0$, com $a \neq 0$. Rescrevendo usando as novas variáveis

$$y_1 = y \quad \text{e} \quad y_2 = y'$$

obtemos a equação linear autónoma homogénea:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}.$$

Os valores próprios de A são as soluções da equação característica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Isto é,

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O sinal do argumento da raíz acima, permite-nos separar a nossa análise em três casos distintos:

- Se $b^2 - 4ac < 0$, a matriz é diagonalizável com valores próprios complexos

$$\lambda_1 = \mu + i\theta, \quad \lambda_2 = \mu - i\theta.$$

onde $\mu = \frac{-b}{2a}$ e $\theta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Os vectores próprios são $v_i = (1, \lambda_i)$. Logo,

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}.$$

A primeira linha da solução acima é

$$y(t) = y_1(t) = c_1 e^{\mu t} \sin(\theta t) + c_2 e^{\mu t} \cos(\theta t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes (i.e. não dependem de t) variando com os valores próprios e com as condições iniciais.

- Se $b^2 - 4ac > 0$, então temos dois valores próprios reais

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A matriz A é assim diagonalizável, e a solução assume a forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, o único valor próprio de A é

$$\lambda = -\frac{b}{2a}.$$

Tem também apenas um vector próprio $v = (1, \lambda)$. Assim, A é conjugada à matriz de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Neste caso,

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} S \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix}.$$

O que implica que a solução é

$$y(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t).$$

(5) Considere o PVI $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Aqui $a = 1$, $b = 2$ e $c = 4$, com $b^2 - 4ac < 0$. Logo, a solução é da forma

$$y(t) = c_1 e^{\mu t} \sin(\theta t) + c_2 e^{\mu t} \cos(\theta t),$$

com $\mu = -1$ e $\theta = \sqrt{3}$. Das condições iniciais,

$$\begin{aligned} y(0) &= c_2 = 1, \\ y'(0) &= c_1 \theta + c_2 \mu = 1, \end{aligned}$$

obtemos

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin(\sqrt{3} t) + e^{-t} \cos(\sqrt{3} t).$$

4.2. **Caso não homogéneo.** Uma equação linear não homogénea com coeficientes constantes é da forma:

$$y' = Ay + b(t)$$

com uma matriz constante $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ e uma função contínua $b\colon I \to \mathbb{R}^d$ para um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O PVI é definido com a condição inicial $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 \in I$.

Proposição 4.3. *A solução é*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\, ds, \qquad t \in I.$$

Exercício 4.4. Prove a proposição anterior.

Exemplo 4.5. Seja

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular primeiro a exponencial de tA. Os valores próprios de A são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2i$, $\lambda_3 = 1-2i$. Escolhemos os vectores próprios correspondentes $v_1 = (2,-3,2)$, $v_2 = (0,1,-i)$, $v_3 = (0,1,i)$. A matriz é assim diagonalizável e

$$e^{tA} = S \begin{bmatrix} e^t & & \\ & e^{t+2it} & \\ & & e^{t-2it} \end{bmatrix} S^{-1}$$

onde

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -i & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 3i+2 & 2i & -2 \\ 3i-2 & 2i & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculando

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\, ds &= \frac{e^t}{2i} \int_0^t \cos(2s) \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{2i(t-s)} + e^{-2i(t-s)} \\ i\left(e^{2i(t-s)} + e^{-2i(t-s)}\right) \end{bmatrix} ds \\ &= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^t -\cos(2s)\sin 2(t-s)\, ds \\ \int_0^t \cos(2s)\cos 2(t-s)\, ds \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{t}{2}\sin 2t \\ \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

obtemos a solução

$$y(t) = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t - \frac{t}{2}\sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t + \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t \end{bmatrix}.$$

5. Transformada de Laplace

5.1. **Definição.** Uma função $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ é contínua por troços se para qualquer $A>0$, f tem no máximo um número finito de descontinuidades em $[0,A]$. Isto é equivalente a dizermos que o conjunto dos pontos de descontinuidade não tem pontos de acumulação. Ou ainda, existe no máximo um número contável de pontos de descontinuidade e estes são todos isolados.

Para $a\in\mathbb{R}$ definimos o conjunto $\mathcal{E}^a$ das funções $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{C}$ tal que

(1) f é contínua por troços e existem os limites laterais $f(t^-)$ e $f(t^+)$, $t\geq 0$.
(2) $f(t)=\frac{f(t^+)-f(t^-)}{2}$, $t\geq 0$.
(3) f é de tipo a-exponencial, i.e. existe $M>0$ tal que
$$|f(t)|\leq Me^{at},\qquad t\geq 0.$$

Dada $f\in\mathcal{E}^a$ e o semi-plano complexo
$$A_a=\{z\in\mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re} z>a\},$$
definimos a *transformada de Laplace* de f como a função complexa
$$\mathcal{L}f\colon A_a\to\mathbb{C},\qquad \mathcal{L}f(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt.$$

Como esta nova função é definida por um integral, é necessário verificar quando o integral existe. Aqui usa-se o facto de f ser de tipo a-exponencial.

Proposição 5.1. *Para qualquer $a\in\mathbb{R}$, se $f\in\mathcal{E}^a$, $\mathcal{L}f$ está bem definida e é analítica em A_a com derivada $(\mathcal{L}f)'=-\mathcal{L}(tf(t))$.*

Demonstração. Para $z\in A_a$ temos que
$$\begin{aligned}\int_0^\infty |e^{-zt}f(t)|\,dt &= \int_0^\infty e^{-t\operatorname{Re} z}|f(t)|\,dt\\ &\leq M\int_0^\infty e^{-t(\operatorname{Re} z-a)}\,dt=\frac{M}{\operatorname{Re} z-a}\end{aligned}$$
é finito. Logo, $\mathcal{L}f$ existe. A analiticidade e a derivada vêm da aplicação da regra de Leibnitz. □

É útil pensar na transformada de Laplace como uma função (operador) no espaço das funções $\mathcal{E}^a$ com imagem no espaço das funções analíticas em A_a, $\mathcal{L}\colon\mathcal{E}^a\to\mathcal{L}(\mathcal{E}^a)\subset C^\omega(A_a)$.

As seguintes propriedades da transformada de Laplace são imediatas.

Proposição 5.2.

(1) $\mathcal{L}$ *é um operador linear, i.e.* $\mathcal{L}(af+bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $f, g \in \mathcal{E}^a$*.*
(2) $\mathcal{L}$ *reduz derivadas, i.e. se* $f \in \mathcal{E}^a$*,*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}f(z) - \sum_{i=0}^{n-1} z^i f^{(n-1-i)}(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

Em particular, $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0)$*.*

Exercício 5.3. Mostre as propriedades anteriores.

Exemplo 5.4.

(1) A função constante $f(t) = 1$ pertence a $\mathcal{E}^0$. Então, $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z}$, $\operatorname{Re} z > 0$.
(2) $f(t) = e^{at}$ está em $\mathcal{E}^a$ e $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z-a}$, $\operatorname{Re} z > a$.
(3) $f(t) = e^{ibt}$ está em $\mathcal{E}^0$ e $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z-ib}$, $\operatorname{Re} z > 0$. Assim,

$$\mathcal{L}(\cos bt)(z) = \frac{\mathcal{L}(e^{ibt})(z) + \mathcal{L}(e^{-ibt})(z)}{2} = \frac{z}{z^2+b^2}.$$

Do mesmo modo,

$$\mathcal{L}(\sin bt)(z) = \frac{b}{z^2+b^2}.$$

(4) Recorde que $(\mathcal{L}f)' = \mathcal{L}(-tf(t))$. Então

$$\mathcal{L}(te^t) = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

(5) Note que

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(z) = \int_0^\infty e^{-(z-a)t} f(t)\, dt = (\mathcal{L}f)(z-a).$$

Então, $\mathcal{L}(e^{3t}\sin t)(z) = \frac{1}{(z-3)^2+1}$.
(6) Dado $c > 0$, considere a chamada função de Heaviside:

$$H_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < c \\ \frac{1}{2}, & t = c \\ 1, & t > c. \end{cases}$$

Como é limitada, apenas descontínua num ponto onde o valor da função é a média dos limites laterais, $H_c \in \mathcal{E}^0$. Assim,

$$\mathcal{L}H_c(z) = \int_0^\infty H_c(t)e^{-zt}\, dt = \int_c^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{e^{-cz}}{z}.$$

(7) Para $c < c'$, $\mathcal{L}(H_c - H_{c'})(z) = \frac{e^{-cz} - e^{-c'z}}{z}$. Desenhe o gráfico de $H_c - H_{c'}$.
(8) Seja $g(t) = H_c(t)\, f(t-c)$. Então, $\mathcal{L}g(z) = e^{-cz}\mathcal{L}f(z)$.

5.2. **Transformada de Laplace inversa.** Considere $b \in \mathbb{R}$ e um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ contendo a recta vertical $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z = b\} \subset A$. Dada uma função $F \colon A \to \mathbb{C}$, definimos a *transformada inversa de Laplace* $\mathcal{L}_b^{-1} F \colon [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{L}_b^{-1} F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{b-iR}^{b+iR} e^{zt} F(z)\, dz.$$

É necessário determinar em que condições é que o limite e o integral existem. Existindo, a transformada inversa está bem definida e $\mathcal{L}_b^{-1}$ é um operador linear.

Observação 5.5. A transformada de Laplace relaciona-se com a transformada de Fourier da seguinte forma. Se $f(t) = 0$, $t < 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-bt} f(t))(\omega) &= \int_0^\infty f(t) e^{-bt - 2\pi i \omega t}\, dt \\ &= \mathcal{L} f(b + 2\pi i \omega). \end{aligned}$$

Teorema 5.6.

(1) *Se $f \in \mathcal{E}^a$, então, para qualquer $b > a$,*
$$f = \mathcal{L}_b^{-1}(\mathcal{L} f).$$
(Como a transformada inversa não depende de b, podemos escrever simplesmente $\mathcal{L}^{-1}$).

(2) *Se $f, g \in \mathcal{E}^a$ e $\mathcal{L} f = \mathcal{L} g$, então $f = g$.*

Demonstração.

(1)
$$\begin{aligned} f(t) &= e^{bt}[f(t) e^{-bt}] = e^{bt} \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(f(t) e^{-bt}) \\ &= e^{bt} \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \mathcal{L} f(b + 2\pi i \omega) e^{2\pi i \omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \to +\infty} \int_{-2\pi A}^{2\pi A} \mathcal{L} f(b + i\omega) e^{(b + i\omega)t} i\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \mathcal{L} f(\gamma(\omega)) e^{\gamma(\omega) t}\, d\omega \end{aligned}$$
onde $\gamma(\omega) = b + i\omega$, $\omega \in [-R, R]$.

(2) $f = \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} f = \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} g = g$.

$\square$

Observação 5.7. O teorema acima mostra que podemos inverter a transformada de Laplace de forma a recuperar a função inicial. Existe assim neste espaço de funções $\mathcal{E}^a$ uma correspondência entre uma função e a sua transformada. Este facto vai ser explorado para a resolução de EDO's.

Observação 5.8. Frequentemente iremos usar a notação $F := \mathcal{L}f$.

O seguinte resultado permite calcular a transformada de Laplace inversa aplicando o teorema dos resíduos a uma extensão analítica da função.

Teorema 5.9. *Seja F analítica em $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $b > \operatorname{Re} z_j$, $j = 1, \dots, n$, e*

$$\lim_{|z| \to +\infty} F(b+z) \log |z| = 0.$$

Então,

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(F(z)e^{zt}, z_j), \quad t > 0.$$

Demonstração. Dado $R > 0$, considere o segmento de recta $\ell_R(s) = b + is$, $s \in [-R, R]$, e a semi-circunferência, $\sigma_R(\theta) = b + Re^{i\theta}$, $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. A união destes caminhos é γ_R. Escolhemos R suficientemente grande para que todas as singularidades z_j estejam dentro da região delimitada pelo caminho γ_R.

Pelo teorema dos resíduos, o integral de $F(z)e^{zt}$ em γ_R é dado pela soma dos resíduos, i.e.

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(F(z)e^{zt}, z_j).$$

Resta mostrar que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} F(z)e^{zt}\, dz = 0.$$

Seja

$$M_R := \sup_{|z|=R} |F(b+z)|.$$

Para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\sigma_R} F(z)e^{zt}\, dz \right| &= \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F(b+Re^{i\theta})e^{bt}e^{Rte^{i\theta}} Ri\, d\theta \right| \\
&\leq Re^{bt} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left| F(b+Re^{i\theta}) \right| e^{Rt\cos\theta}\, d\theta \\
&\leq Re^{bt} M_R \left(e^{-Rt\varepsilon/2} \int_{\pi/2+\varepsilon}^{3\pi/2-\varepsilon} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\varepsilon} d\theta + \int_{3\pi/2-\varepsilon}^{3\pi/2} d\theta \right)
\end{aligned}$$

onde usámos o facto de

$$\cos(\theta) < \cos(\pi/2+\varepsilon) = -\sin(\varepsilon) < -\frac{1}{2}\varepsilon < 0$$

quando $\pi/2 + \varepsilon < \theta < 3\pi/2 - \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Escolhendo $\varepsilon = \log(R)/(Rt)$, obtemos para R suficientemente grande,

$$\left|\int_{\sigma_R} F(z)e^{zt}\,dz\right| \leq Re^{bt}M_R\left[\frac{1}{R}\left(\pi - \frac{2\log R}{R}\right) + \frac{2\log R}{R}\right] \leq 2e^{bt}M_R\log R.$$

Usando a hipótese, $M_R \log R \to 0$ com $R \to +\infty$. Temos assim convergência para 0 quando $R \to +\infty$. □

Exemplo 5.10. Vejamos um exemplo de uma função que está nas condições do teorema. Se $F(z) = \frac{1}{z}$, $b > 0$ e R é suficientemente grande, então

$$\log R\,|F(b + Re^{i\theta})| = \frac{\log R}{|b + Re^{i\theta}|} \leq \frac{\log R}{R - b}.$$

Logo, o limite é 0 quando $R \to +\infty$.

Exercício 5.11. Mostre que todas funções racionais $\frac{P(z)}{Q(z)}$ (quociente entre polinómios) estão nas condições do teorema, desde que o grau do numerador seja menor que o do denominador.

Exemplo 5.12. $F(z) = \frac{1}{z-a}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. O resíduo de $F(z)e^{zt}$ em a é e^{at}. Logo, $\mathcal{L}^{-1}F(t) = e^{at}$.

Exercício 5.13. Nas condições do teorema determine $\mathcal{L}^{-1}F(0)$.

5.3. **Convolução.** A convolução entre duas funções f e g é definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds.$$

Esta operação entre funções satisfaz as propriedades seguintes:

Proposição 5.14.

(1) $f * g = g * f$ *(comutatividade)*
(2) $f * (g + h) = f * g + f * h$ *(distributividade)*
(3) $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(associatividade)*
(4) $f * 0 = 0$ *(elemento absorvente)*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 5.15. *Se $f, g \in \mathcal{E}^a$, então $f * g \in \mathcal{E}^a$ e $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f\,\mathcal{L}g$.*

Observação 5.16. Este resultado permite obter uma forma de calcular transformadas inversas. Denotando $F = \mathcal{L}f$, $G = \mathcal{L}g$, a fórmula acima implica que

$$\mathcal{L}^{-1}(F\,G) = (\mathcal{L}^{-1}F) * (\mathcal{L}^{-1}G).$$

Demonstração. Exercício □

Exemplo 5.17.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2}\frac{a}{z^2+a^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{z^2+a^2}\right) \\
&= t * \sin(at) \\
&= \frac{at-\sin at}{a^2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.18. Recorde que $\mathcal{L}H_1(z) = e^{-z}/z$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-z}}{z}\right) \\
&= 1 * H_1 = \int_0^t H_1(s)\,ds \\
&= \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ \int_1^t ds = t-1, & t \ge 1. \end{cases} \\
&= (t-1)H_1(t).
\end{aligned}$$

5.4. **Aplicação a EDO's.** A transformada de Laplace é útil para a resolução de equações diferenciais pois a fórmula

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0)$$

reduz a EDO a uma equação algébrica em $\mathcal{L}f$. A transformada inversa recupera a solução. Vejamos exemplos.

Exemplo 5.19.

(1) Aplicando $\mathcal{L}$ ao PVI $y' = ay$, $y(0) = y_0$, obtemos

$$zY(z) - y_0 = aY(z),$$

onde $Y = \mathcal{L}y$. Esta é uma equação linear em Y que facilmente resolvemos:

$$Y(z) = \frac{y_0}{z-a}.$$

Esta é a transformada de Laplace da solução do PVI. Para obtermos a solução basta usar a transformada inversa:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(t) = \operatorname{Res}(Y(z)e^{zt}, a) = e^{at}y_0.$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Usando $\mathcal{L}$ obtemos

$$z^2Y - z - 3(zY-1) + 2Y = \frac{1}{z-3}.$$

Resolvendo em ordem a Y, chegamos a

$$Y(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \frac{z-3}{(z-1)(z-2)}.$$

A solução do PVI é então

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}Y(t) \\ &= \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z-1)(z-2)(z-3)}, j\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{(z-3)e^{zt}}{(z-1)(z-2)}, j\right) \\ &= \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}. \end{aligned}$$

(3) $y'' - 3y' + 2y = H_0(t) - H_1(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, onde H é a função de Heaviside. Temos então

$$z^2Y - 3zY + 2Y = \frac{1-e^{-z}}{z}.$$

Ou seja,

$$Y(z) = \frac{1-e^{-z}}{z(z-1)(z-2)}$$

e, finalmente,

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{e^{2t}}{2}\right) - H_1(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-1} + \frac{e^{2(t-1)}}{2}\right).$$

5.5. **Transformada de Laplace multidimensional.** Consideramos agora o caso multidimensional. A norma em $\mathbb{C}^d$ dada por $\|x\| = \max_i |x_i|$ com $x \in \mathbb{C}^d$.

Vamos estudar funções $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{C}^d$ na forma $f(t) = (f_1(t),\dots,f_d(t))$. A transformada de Laplace de f é definida componente a componente. Dizemos que $f \in \mathcal{E}^a$ sse $f_i \in \mathcal{E}^a$ para todo o $i = 1,\dots,d$. Assim,

$$\mathcal{L}f = (\mathcal{L}f_1,\dots,\mathcal{L}f_d).$$

Exercício 5.20. Seja $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$. Mostre que a função $f(t) = e^{tA}v$, com $v \in \mathbb{R}^d$, pertence a $\mathcal{E}^a$ se

$$a > \max_j \operatorname{Re}\lambda_j,$$

onde $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ são os valores próprios de A.

A aplicação a EDO's multidimensionais é também possível.

Exemplo 5.21. $y' = Ay + b(t)$, $y(0) = y_0$, com $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ e $b\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}^d$ contínua. Aplicando $\mathcal{L}$, obtemos $zY(z) - y_0 = AY(z) + B(z)$ onde $B = \mathcal{L}b$. A solução desta equação é $Y(z) = (zI - A)^{-1}[y_0 + B(z)]$. Usando agora a transformada inversa, chegamos à solução do PVI:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(t) = e^{At}y_0 + e^{At} * b(t).$$

Resta observar que $e^{At} * b(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds$ para reconhecermos a solução.

6. *Equações lineares com coeficientes variáveis

Começamos por analisar a equação homogénea,

$$y' = A(t)\, y, \quad y(t_0) = y_0$$

onde $A\colon I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ é contínua, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $u_0 = \mathbb{R}^d$.

Em analogia com o caso unidimensional, será que

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)\, ds}\, y_0$$

é a solução?

A resposta é:

(1) Sim, no caso unidimensional.
(2) Sim, no caso de coeficientes constantes, i.e. $A(t)$ é uma matriz constante.
(3) Sim, no caso de $A(t)$ e $A(s)$ comutarem, i.e. $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, para quaisquer $t, s \in I$. Isto porque graças à comutatividade podemos mostrar por indução que

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^t A(s)\, ds\right]^n = nA(t)\left[\int_{t_0}^t A(s)\, ds\right]^{n-1}$$

A derivada da exponencial segue daqui, e verifica-se sem dificuldade que $y(t)$ é a solução.
(4) Não, no caso geral. Por exemplo,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Tome $t_0 = 0$ para simplificar. Calculando

$$e^{\int_0^t A(s)\, ds} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 + 2\frac{e^{t^2/2}-1}{t} & e^{t^2/2} \end{bmatrix}$$

obtemos que

$$\frac{d}{dt} e^{\int_0^t A(s)\, ds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2e^{t^2/2} - \frac{e^{t^2/2}-1}{t^2} & te^{t^2/2} \end{bmatrix} \neq A(t) e^{\int_0^t A(s)\, ds} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t - 1 + 2e^{t^2/2} & te^{t^2/2} \end{bmatrix}$$

Ou seja, $y(t)$ não é solução para qualquer y_0. Para $y_0 = (0,1)$ é solução, mas já não é para $y_0 = (1,0)$.

6.1. Espaço das soluções.

A noção de independência linear é aplicável a funções. Considere $f_1, \dots, f_N$ funções de I em $\mathbb{R}^d$. Elas são linearmente independentes se para qualquer $t \in I$, os únicos números reais $c_1, \dots, c_N$ que satisfazem

$$\sum_{i=1}^N c_i f_i(t) = 0$$

são $c_1 = \cdots = c_N = 0$. Isto significa que qualquer uma das funções f_i não é combinação linear das restantes.

Exemplo 6.1. $f_n(t) = t^n$. Fazendo a N-ésima derivada de $\sum_{i=0}^{N} t^i = 0$ obtemos $c_N = 0$. Repetindo para a $(N-1)$-ésima derivada de $\sum_{i=0}^{N-1} t^i = 0$ ficamos com $c_{N_1} = 0$. Continuando até $c_0 = 0$, concluímos que são linearmente independentes.

Exercício 6.2. Mostre que as funções $f_n(t) = e^{\lambda_n t}$ com $\lambda_n \in \mathbb{C}$ distintos, são linearmente independentes.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas as funções que satisfazem $y' = A(t)y$ (não restringindo a condição inicial).

Teorema 6.3 (Teorema fundamental das equações diferenciais lineares)**.** *S é um espaço linear com dimensão d.*

Demonstração. Queremos mostrar que $\mathcal{S}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^d$, i.e. existe uma bijecção linear entre $\mathcal{S}$ e $\mathbb{R}^d$. Dado $t_0 \in I$, seja $B\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^d$ com $B(y) = y(t_0)$. Esta transformação é linear, pois

$$B(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = c_1B(y_1) + c_2B(y_2).$$

Também é sobrejectiva pois pelo teorema da existência e unicidade, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}^d$ existe uma única função $y \in \mathcal{S}$ tal que $B(y) = y(t_0) = y_0$. Ou seja, $B(S) = \mathbb{R}^d$. Finalmente, o núcleo de B,

$$\{y \in S\colon B(y) = y(t_0) = 0\}$$

resume-se à solução nula (novamente pelo teorema da existência e unicidade). Isto significa que B é injectiva. $\square$

A principal consequência do teorema anterior é a existência de d soluções linearmente independentes que geram todas as outras soluções. Basta assim encontrar d soluções (para diferentes condições iniciais) que formem uma base de S.

Para $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{S}$ escrevemos a matriz

$$M(t) = \begin{bmatrix} \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(t) & \dots & \varphi_d(t) \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Proposição 6.4. *$\det M(t) \neq 0$ para qualquer $t \in I$ sse $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ é uma base de S.*

Exercício 6.5. Demonstre a proposição.

6.2. **Solução fundamental.** Chamamos a uma base $\{\varphi_1,\dots,\varphi_d\}$ de $\mathcal{S}$ um sistema fundamental de soluções e a $M(t)$ solução fundamental. Assim, qualquer solução é dada pela combinação linear dos elementos da base, ou seja, por $y(t)=M(t)\,c$ com $c\in\mathbb{R}^d$. Usando a condição inicial $y(t_0)=M(t_0)\,c=y_0$ e como mostrámos acima que $M(t_0)$ é invertível, temos que a solução do PVI é dada por

$$y(t)=M(t)M(t_0)^{-1}y_0.$$

Existem muitas soluções fundamentais. Basta fazer uma mudança de base de $\mathcal{S}$. Podemos seleccionar uma delas, a que tem a propriedade de ser igual à identidade quando $t=t_0$. A matriz solução fundamental canónica é assim

$$X(t)=M(t)M(t_0)^{-1}$$

para qualquer solução fundamental $M(t)$. Temos assim

$$y(t)=X(t)y_0.$$

Isto significa que a i-ésima coluna de $X(t)$ é a solução correspondente à condição inicial $y_0=e_i$, onde e_i é o i-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^d$. Note que temos

$$X'(t)=A(t)X(t),\qquad X(t_0)=I.$$

Exemplo 6.6. Seja $A\in\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ diagonalizável, com $Av_i=\lambda_i v_i$, $i=1,\dots,d$ (os valores próprios podem não ser distintos). Como os d vectores próprios v_i são linearmente independentes, podemos escolher as soluções de $y'=Ay$ dadas por

$$\varphi_i(t)=e^{\lambda_i t}v_i.$$

Note que $M(t)=Se^{tJ}$, onde S é a matriz cujas colunas são os vectores próprios e J é a matriz diagonal dos valores próprios. Assim,

$$\det M(t)=e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_d)t}\det S\neq 0.$$

Estas soluções formam uma base de $\mathcal{S}$. A solução é dada pela matriz solução fundamental canónica

$$X(t)=M(t)M(t_0)^{-1}=Se^{tJ}e^{-t_0J}S^{-1}=e^{(t-t_0)A}.$$

Exercício 6.7. Repita o exemplo anterior para uma matriz não diagonalizável.

Teorema 6.8 (Fórmula de Liouville)**.** *$\det X(t)=e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr}A(s)\,ds}$, $t\in I$.*

Demonstração. Fixando $t\in I$, a fórmula de Taylor $X(t+h)=X(t)+hX'(t)+o(h)$ [3] para $h\in\mathbb{R}$, permite-nos escrever

$$\det X(t+h)=\det X(t)\det(I+hA(t)+o(h)),$$

[3]Recorde que $f(h)=o(h)$ significa que $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$.

pois $X'(t)X(t)^{-1} = A(t)$. O determinante de $I + hA(t) + o(h)$ é o produto dos valores próprios. Para calculá-los escrevemos o polinómio característico.

$$\det((I + hA(t) + o(h)) - \lambda I) = 0.$$

Isto é equivalente a $\det(A(t) - h^{-1}(\lambda - 1 + o(h))I) = 0$. Sendo σ_i um valor próprio de $A(t)$ com multiplicidade algébrica μ_i, temos que $\lambda = 1 + h\sigma_i + o(h)$. Logo,

$$\det(I + hA(t) + o(h)) = \prod_i (1 + h\sigma_i + o(h))^{\mu_i} = 1 + h\sum_i \mu_i\lambda_i + o(h).$$

Note que $\sum_i \mu_i\lambda_i = \operatorname{tr} A(t)$.

Finalmente,

$$\frac{\det X(t+h) - \det X(t)}{h} = \operatorname{tr} A(t)\,\det X(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Quando $h \to 0$, obtemos

$$(\det X)' = \operatorname{tr} A \det X.$$

□

Observação 6.9. Uma qualquer solução fundamental $M(t)$ satisfaz $M(t) = X(t)M(t_0)$. Logo, o teorema anterior implica que

$$\det M(t) = e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\,ds} \det M(t_0).$$

Exemplo 6.10. Se a EDO linear de ordem d,

$$y^{(d)} + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(t)y^{(i)} = 0,$$

tiver d soluções $\phi_1, \dots \phi_d$ linearmente independentes, então a correspondente EDO de 1ª ordem em dimensão d tem soluções

$$\varphi_i = (\phi_i, \phi_i' \dots, \phi_i^{(d-1)}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Então

$$\det M(t) := \begin{vmatrix} \phi_1 & & \phi_d \\ \phi_1' & & \phi_d' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1^{(d-1)} & & \phi_d^{(d-1)} \end{vmatrix} = e^{-\int_{t_0}^t a_{d-1}(s)\,ds} \det M(t_0).$$

Exemplo 6.11. Seja a EDO $(2t + 1)y'' + 4ty' - 4t = 0$ com ordem $d = 2$. Vamos testar a existência de uma solução do tipo $\phi_1(t) = e^{pt}$ com $p \in \mathbb{R}$. Introduzindo na equação diferencial, só temos solução se $p = -2$. Logo, $\phi_1(t) = e^{-2t}$ é uma solução. Queremos encontrar outra solução $\phi_2(t)$ que seja linearmente independente partindo de

$$\det M(t) = e^{f(t)} \det M(t_0),$$

onde $f(t) = \int_{t_0}^t \frac{4s}{2s+1}\,ds$. Como procuramos uma solução qualquer, tomemos $t_0 = 0$, $\phi_2(0) = \frac{1}{2}$ e $\phi_2(0) = 0$ (as soluções ϕ_1 e ϕ_2 devem ser linearmente independentes, pelo que $\det M(t_0)$ tem que ser não nulo). Assim,

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & \phi_2(t) \\ -2e^{-2t} & \phi_2'(t) \end{vmatrix} = (2t+1)e^{-2t} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo a expressão, chegamos à equação diferencial linear não homogénea de dimensão 1, $\phi_2' = -2\phi_2 + 2t - 1$. Esta sabemos resolver directamente:

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + t.$$

A matriz solução fundamental é dada finalmente por

$$M(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t} + t \\ -2e^{-2t} & -e^{-2t} + 1 \end{bmatrix}$$

e a solução fundamenta canónica é

$$X(t) = M(t)M(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} + 2t & t \\ -2e^{-2t} + 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a solução do PVI é

$$y(t) = (e^{-2t} + 2)y_0 + ty_0'.$$

6.3. **Caso não homogéneo.** A solução da equação não homogénea é determinada a partir da da equação homogénea.

Proposição 6.12. *A solução do PVI $y' = A(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ é*

$$y(t) = X(t)y_0 + \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}b(s)\,ds.$$

Exercício 6.13. Prove a proposição anterior.

Observação 6.14.

(1) A solução do PVI com condição inicial $y_0 = 0$ é

$$y(t) = \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}b(s)\,ds.$$

(2) A solução da equação não homogénea é, como em casos anteriores, a soma da solução da equação homogénea com a solução para a condição inicial nula.

6.4. **Coeficientes periódicos: teoria de Floquet.** No caso de $A(t)$ ser uma função matricial periódica, podemos dizer um pouco mais sobre a solução fundamental.

Supomos que existe $T > 0$ tal que $A(t+T) = A(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, i.e. A é periódica com período T. Queremos resolver o PVI $y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$, nestas condições[4].

A observação crucial é a seguinte: se $\varphi(t)$ verifica a EDO, então $\varphi(t+T)$ também a verifica. De facto, fazendo $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(t+T)$, temos que $\tilde{\varphi}'(t) = \varphi'(t+T) = A(t+T)\varphi(t+T) = A(t)\tilde{\varphi}(t)$.

Isto implica que se $X(t)$ é a solução fundamental canónica, então $X(t+T)$ é solução fundamental (não necessariamente canónica). Pela relação entre qualquer solução fundamental e a canónica, $X(t+T)X(t_0+T)^{-1} = X(t)$. Ou seja,

$$X(t+T) = X(t)X(t_0+T).$$

Teorema 6.15 (Floquet)**.** *Seja $X(t)$ a solução fundamental canónica. Existe uma matriz $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ e uma função matricial $P\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ contínua e periódica com período T, tais que $P(t)$ é invertível e*

$$X(t) = P(t)e^{tB}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6.16. Prove o teorema seguindo os seguintes passos:

(1) Mostre que para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ existe $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tal que $A = e^{TB}$.
(2) Seja $P(t) := X(t)e^{tB}$. Mostre que:
  (a) Para cada t, $P(t)$ é invertível.
  (b) P é uma função contínua.
  (c) P é periódica com período T.

Observação 6.17. A solução do PVI é então dada por

$$y(t) = X(t)y_0 = X(t)X(t_0)^{-1}y_0 = P(t)e^{tB}e^{-t_0B}P(t_0)^{-1}y_0,$$

onde usámos o facto de $X(t_0) = I$. Logo,

$$P(t)^{-1}y(t) = e^{(t-t_0)B}P(t_0)^{-1}y_0.$$

Se $z(t) = P(t)^{-1}y(t)$, o que temos é a solução do PVI linear homogéneo com coeficientes constantes,

$$z' = Bz, \quad z(t_0) = P(t_0)^{-1}y_0.$$

Isto significa que o caso dos coeficientes periódicos está relacionado com o caso dos coeficientes constantes através de uma transformação de coordenadas P periódica.

[4] Ou seja, determinar a matriz solução fundamental canónica $X(t)$.

A matriz $e^{TB} = X(t_0 + T)$ é chamada matriz monodromia. Os seus valores próprios ρ_i são os multiplicadores característicos. Os valores próprios λ_i de B são os expoentes característicos (ou de Floquet). Note que $\rho_i = e^{T\lambda_i}$.

Em geral é difícil calcular os expoentes de Floquet, ao contrário da sua soma. Recorde a fórmula de Liouville dada pelo Teorema 6.8:

$$\det(X(t)) = \det(P(t))\det(e^{tB}) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\,ds}.$$

Para t igual ao período T, temos $P(T) = P(0) = I$, $\det(e^{TB}) = e^{T \operatorname{tr} B}$, e assim

$$\sum_i \lambda_i = \operatorname{tr} B = \frac{1}{T}\int_{t_0}^T \operatorname{tr} A(s)\,ds + \frac{2\pi i k}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

7. Equações às diferenças

As soluções de EDOs são funções de uma variável definida num intervalo. Vamos agora considerar sucessões, quando a variável é discreta. Queremos encontrar a sucessão $x_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, que satisfaz a relação de recorrência

$$x_{n+k} = f(n, x_n, \dots, x_{n+k-1}), \quad n \geq 1,$$

conhecendo os valores iniciais: $x_0, \dots, x_{n+k-1}$. Como o valor do termo de ordem $n+k$ depende dos termos anteriores desde n, esta relação de recorrência é de grau k.

7.1. **Diferenças.** A diferença (ou variação) de 1ª ordem de x_n é definida como

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

A diferença de 2ª ordem é assim

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

O caso geral de ordem k é

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i}.$$

Por outro lado,

$$x_{n+k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i x_n.$$

Temos assim uma relação entre as diferenças e os termos da sucessão, o que implica que uma equação às diferenças

$$\Delta^k x_n = g(n, \Delta x_n, \dots, \Delta^{k-1} x_n)$$

é equivalente a uma relação de recorrência de grau k. Usamos neste texto o nome equação às diferenças, mas lidamos com relações de recorrência.

7.2. **Equações lineares de 1ª ordem.** Como fizemos para as EDOs, podemos reduzir qualquer equação às diferenças de ordem k a uma de ordem 1, aumentando a dimensão:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(n, x_n, \dots, x_{n+k-1}) \end{bmatrix}.$$

Vamos estudar apenas as equações de 1ª ordem lineares, ou seja

$$x_{n+1} = A_{n+1}x_n + b_{n+1},$$

onde $A_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ e $b_n \in \mathbb{R}^d$, para uma condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Proposição 7.1. *A solução é dada por*

$$x_n = A^{(n,0)}x_0 + \sum_{i=1}^{n} A^{(n,i)}b_i,$$

onde $A^{(n,i)} = A_n \dots A_{i+1}$ *e* $A^{(n,n)} = I$.

Exercício 7.2. Demonstre a proposição anterior.

Observação 7.3. Por uns momentos admire as semelhanças entre esta solução e a das EDOs lineares. A solução da equação homogéna é simplesmente o produto das matrizes. A esta soma-se a solução correspondendo a $x_0 = 0$.

Observação 7.4. Se as matrizes A_n forem todas iguais a uma matriz constante A, a solução é naturalmente dada por

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{i=1}^{n} A^{n-i}b_i.$$

Para calcularmos as potências de A podemos usar a tecnologia da forma normal de Jordan.

Exemplo 7.5. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Passando para a equação linear de 1ª ordem

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix},$$

resta calcular as potências da matriz $A := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Os valores próprios são soluções de

$$\lambda^2 = \lambda + 1,$$

ou seja, $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $-\lambda^{-1}$. Assim, $A^n = SJ^nS^{-1}$ onde

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda^{-1} \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\lambda + \lambda^{-1}} [\lambda^n - (-\lambda^{-1})^n] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Esta sucessão é conhecida como a sucessão de Fibonacci.

Exercício 7.6. Seja $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, raíz do polinómio $\lambda^2 - \lambda - 1$. Note que $\lambda^3 = \lambda\lambda^2 = \lambda(\lambda+1) = 2\lambda + 1$. Por outro lado, $\lambda^4 = 2\lambda^2 + \lambda = 3\lambda + 2$. Determine a fórmula geral para λ^n na forma $a\lambda + b$.

Exemplo 7.7. $x_{n+2} = nx_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. A equação de 1ª ordem correspondente é

$$X_{n+1} = A_{n+1} X_n$$

com $X_n = (x_n, x_{n+1})$, $X_0 = (0, 1)$ e $A_{n+1} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ n & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Note que

$$A_{j+1} A_j = \begin{bmatrix} j-1 & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal. Então, se n é par,

$$\begin{aligned} A^{(n,0)} &= (A_n A_{n-1}) \dots (A_4 A_3)(A_2 A_1) \\ &= \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \prod_{k=0}^{n/2-1} (2k+1) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e se n é ímpar ($n-1$ é par),

$$A^{(n,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ n-1 & 0 \end{bmatrix} A^{(n-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \prod_{k=0}^{n/2-3/2} (2k+1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Transformada Z

8.1. **Definição.** A versão discreta da transformada de Laplace é a transformada Z. Vamos seguir de perto as ideias do caso contínuo agora para sucessões. Isso permitirá termos uma forma alternativa para a determinação de soluções para equações às diferenças lineares.

Para $a \geq 0$ definimos o conjunto $\mathcal{E}_a$ das sucessões $x_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, para as quais existe $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M a^n, \qquad n \geq 0.$$

Dada uma sucessão x_n em $\mathcal{E}_a$ e o conjunto
$$B_a = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > a\},$$
definimos a *transformada Z* de x_n como a função complexa
$$\mathcal{Z}x \colon B_a \to \mathbb{C}, \qquad \mathcal{Z}x(z) = \sum_{n\geq 0} x_n z^{-n}.$$

Como esta função é definida por uma série, é necessário verificar se a série é convergente.

Proposição 8.1. *Para qualquer $a \geq 0$, se $x_n \in \mathcal{E}_a$, $\mathcal{Z}x$ está bem definida e é analítica em B_a com derivada $(\mathcal{Z}x)' = -z^{-1}\mathcal{Z}(nx_n)$.*

Demonstração. Para $z \in B_a$ temos que
$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} |x_n z^{-n}| &\leq M \sum_{n\geq 0} a^n |z|^{-n} \\ &= \frac{M}{1 - a|z|^{-1}} \end{aligned}$$
é finito. Logo, $\mathcal{Z}x$ converge absoluta e uniformemente. A analiticidade e a derivada vêm da derivada termo a termo:
$$(\mathcal{Z}x)'(z) = \sum_{n\geq 0} x_n(-n)z^{-n-1} = -z^{-1}\sum_{n\geq 0} n x_n z^{-n}.$$
□

É útil pensar na transformada Z como uma função (operador) no espaço das funções $\mathcal{E}_a$ com imagem no espaço das funções analíticas em B_a, $\mathcal{Z} \colon \mathcal{E}_a \to C^\omega(B_a)$.

As seguintes propriedades da transformada Z são imediatas.

Proposição 8.2.

(1) *$\mathcal{Z}$ é um operador linear, i.e. $\mathcal{Z}(c_1 x + c_2 y) = c_1\mathcal{Z}x + c_2\mathcal{Z}y$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathcal{E}_a$.*

(2) *$\mathcal{Z}$ reduz ordens, i.e. se $x \in \mathcal{E}_a$,*
$$\mathcal{Z}(x_{n+k})(z) = z^k \mathcal{Z}x_n(z) - \sum_{i=1}^{k} x_{k-i} z^i, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Em particular, $\mathcal{Z}(x_{n+1})(z) = z\mathcal{Z}x_n(z) - x_0 z$.

Exercício 8.3. Mostre as propriedades anteriores.

Exemplo 8.4.

(1) A sucessão constante $x_n = 1$ pertence a $\mathcal{E}_1$. Então,
$$\mathcal{Z}x(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

(2) $x_n = \lambda^n$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, está em $\mathcal{E}_{|\lambda|}$ e

$$\mathcal{Z}x(z) = \frac{z}{z-\lambda}, \quad |z| > |\lambda|.$$

(3) $x_n = 1/n!$ está em $\mathcal{E}_a$ para qualquer $a > 0$ e

$$\mathcal{Z}x(z) = e^{1/z}, \quad |z| > 0.$$

8.2. **Transformada Z inversa.** Considere $b > 0$ e um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ contendo a circunferência $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = b\} \subset B$. Dada uma função $X \colon B \to \mathbb{C}$ definimos a *transformada Z inversa* $(\mathcal{Z}_b^{-1}X)_n \in \mathbb{C}$ como

$$(\mathcal{Z}_b^{-1}X)_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=b} X(z) z^{n-1}\, dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

É necessário determinar em que condições é que o integral existe. Existindo, a transformada Z inversa está bem definida e $\mathcal{Z}_b^{-1}$ é um operador linear.

Teorema 8.5. *Seja $x \in \mathcal{E}_a$. Então,*

(1) *Para qualquer $b > a$,*

$$x = \mathcal{Z}_b^{-1}(\mathcal{Z}x).$$

(Como a transformada inversa não depende de b, podemos escrever simplesmente $\mathcal{Z}^{-1}$).

(2) *Se $x, y \in \mathcal{E}_a$ e $\mathcal{Z}x = \mathcal{Z}y$, então $x = y$.*

Demonstração. [...] □

Observação 8.6. O teorema acima mostra que podemos inverter a transformada Z de forma a recuperar a sucessão inicial. Existe assim neste espaço de sucessões $\mathcal{E}_a$ uma correspondência entre uma função e a sua transformada. Este facto vai ser explorado para a resolução de equações às diferenças.

Observação 8.7. Frequentemente iremos usar a notação $X := \mathcal{Z}x$.

O seguinte resultado permite calcular a transformada Z inversa aplicando o teorema dos resíduos a uma extensão analítica da função.

Teorema 8.8. *Seja F analítica em $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > |z_j|$, $j = 1, \ldots, k$. Então*

$$(\mathcal{Z}^{-1}X)_n = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(X(z)z^{n-1}, z_j), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 8.9. $X(z) = \frac{1}{z-a}$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. O resíduo de $X(z)z^{n-1}$ em a é a^{n-1}. Logo, $(\mathcal{Z}^{-1}X)_n = a^{n-1}$.

8.3. **Aplicação a equações às diferenças.** A transformada Z é útil para a resolução de equações às diferenças pois a fórmula $\mathcal{Z}(x_{n+1})(z) = z\mathcal{Z}x_n(z) - x_0$ reduz a equações algébricas em $\mathcal{Z}x_n$. A transformada Z inversa recupera a solução. Vejamos exemplos.

Exemplo 8.10.

(1) Aplicando $\mathcal{Z}$ a $x_{n+1} = ax_n$, $x_0 \in \mathbb{R}$, obtemos
$$zX(z) - x_0 z = aX(z),$$
onde $X = \mathcal{Z}x$. Esta é uma equação linear em X que facilmente resolvemos:
$$X(z) = \frac{x_0 z}{z-a}.$$
Esta é a transformada Z da solução. Para obtermos a solução basta usar a transformada Z inversa:
$$x_n = (\mathcal{Z}^{-1}X)_n = \operatorname{Res}(X(z)z^{n-1}, a) = a^n x_0.$$

(2) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 3^n$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$. Usando $\mathcal{Z}$ obtemos
$$z^2X - z^2 - 3(zX - z) + 2X = \frac{z}{z-3}.$$
Resolvendo em ordem a X, chegamos a
$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \frac{z(z-3)}{(z-1)(z-2)}.$$
A solução é então
$$\begin{aligned} x_n &= (\mathcal{Z}^{-1}X)_n \\ &= \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{z^n}{(z-1)(z-2)(z-3)}, j\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{(z-3)z^n}{(z-1)(z-2)}, j\right) \\ &= \frac{5}{2} - 2^{n+1} + \frac{3^n}{2}. \end{aligned}$$

8.4. **Convolução.** A convolução entre duas sucessões x e y é definida por
$$(x * y)_n = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k.$$
Esta operação entre sucessões satisfaz as propriedades seguintes:

Proposição 8.11.

(1) $x * y = y * x$ *(comutatividade)*
(2) $x * (y + z) = x * y + x * z$ *(distributividade)*
(3) $(x * y) * z = x * (y * z)$ *(associatividade)*

(4) $x * 0 = 0$ *(elemento absorvente)*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 8.12. *Se $x, y \in \mathcal{E}_a$, então $x * y \in \mathcal{E}_a$ e $\mathcal{Z}(x * y) = \mathcal{Z}x\, \mathcal{Z}y$.*

Observação 8.13. Assim,

$$\mathcal{Z}^{-1}(X\,Y) = x * y.$$

Demonstração. Exercício □

Exemplo 8.14. Queremos encontrar a sucessão x_n da equação

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_{n-k}}{3^k} = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Note que o membro da esquerda é a convolução entre x_n e $y_n = 3^{-n}$. Aplicando $\mathcal{Z}$,

$$\frac{3zX}{3z-1} = \frac{2z}{2z-1},$$

obtemos $x_n = \frac{2}{3}2^{-n}$.

8.5. **Transformada Z multidimensional.** Consideramos agora o caso multidimensional com a norma em $\mathbb{C}^d$ dada por $\|x\| = \max_i |x_i|$ com $x \in \mathbb{C}^d$.

Vamos estudar sucessões $x_n \in \mathbb{C}^d$ na forma $x_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. A transformada Z de x é definida componente a componente. Dizemos que $x \in \mathcal{E}_a$ sse $x_i \in \mathcal{E}_a$ para todo o $i = 1, \ldots, d$. Assim,

$$\mathcal{Z}x = (\mathcal{Z}x_1, \ldots, \mathcal{Z}x_d).$$

Exercício 8.15. Seja $A \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$. Mostre que a sucessão $x_n = A^n x_0$ pertence a $\mathcal{E}_a$ se

$$a > \max_j |\lambda_j|,$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os valores próprios de A.

9. Equações não lineares autónomas

Já vimos que conseguimos encontrar soluções explícitas para as EDOs lineares com coeficientes constantes. O caso de equações não lineares é muito mais complicado. Não vamos em geral encontrar soluções, mas iremos ter alguma informação sobre elas (o que em muitos casos é fundamental).

Restringimos agora o nosso estudo a EDOs autónomas (f não depende de t) na forma

$$y' = f(y)$$

onde $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é Lipschitz. Note que a função f é um campo vectorial, em cada ponto do seu domínio indica um vector. De forma a simplificar, vamos também fixar sempre a condição inicial a $t_0 = 0$.

9.1. **Órbitas.** Pelo teorema da existência e unicidade, a solução do PVI: $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, é uma função C^1 dada por $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ [5].

Proposição 9.1. *Se $f(y_0) = 0$, então $y(t) = y_0$, $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Exercício. □

O conjunto $\mathbb{R}^d$ onde y tem a sua imagem é chamado *espaço de fases*. Estamos interessados em conhecer a imagem de y no espaço de fases, ou seja $y(\mathbb{R})$. Temos dois tipos de casos conforme a condição inicial y_0:

(1) Ponto de equilíbrio[6]: quando $y(t) = y_0$, $t \in \mathbb{R}$, (com $f(y_0) = 0$), correspondendo a um ponto no espaço de fases, $y(\mathbb{R}) = \{y_0\}$.
(2) Órbita[7]: $y(t)$ é uma parametrização[8] e $y(\mathbb{R})$ é uma curva[9]. A derivada $y'(t)$ é o vector tangente em $y(t)$.

O conjunto das órbitas de um sistema é chamado *retrato de fase*.

Como já vimos anteriormente, uma consequência fundamental do teorema de existência e unicidade é que órbitas diferentes não se intersectam. Além disso, se uma solução é periódica, a órbita é uma curva fechada e simples, sendo chamada órbita periódica.

Observação 9.2. Nesta altura é importante destacar a diferença entre a informação que uma órbita no espaço de fases nos dá, comparativamente ao gráfico da função $y(t)$. De facto, a órbita apenas nos assinala os pontos que são imagem de y para algum t, sem sabermos para que valor de t. Por outro lado, o gráfico dá-nos essa informação. O que acontece no caso de equações não lineares é que só conseguimos obter dados sobre órbitas. Destas podemos deduzir mesmo assim muita informação acerca da estabilidade das soluções e do seu comportamento assimptótico (quando $t \to \infty$).

Exemplo 9.3. Para qualquer EDO linear $y' = Ay$, a origem é um ponto de equilíbrio.

Exemplo 9.4. $x' = 1 - y$, $y' = x^3 + y$. O único ponto de equilíbrio é $(-1, 1)$, correspondendo a uma solução constante. Não sabemos à partida mais nada sobre outras órbitas.

---

[5] Prove. Use o Teorema 3.16 e reverta a variável t na EDO para valores negativos considerando $-f$

[6] Também chamado de solução de equilíbrio ou singularidade ou ponto fixo.

[7] Também chamada trajectória ou curva integral.

[8] Também chamada caminho regular (função C^1 cuja derivada nunca se anula). AM3!

[9] Note que existem muitas parametrizações que geram a mesma curva.

Exemplo 9.5. A EDO linear

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

tem solução

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Note que $x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$. Assim, todas as circunferências centradas na origem são órbitas periódicas. Por outro lado, a origem é o único ponto de equilíbrio.

Exemplo 9.6. Considere

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A solução é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Note que $x(t)y(t) = x_0 y_0$. Logo, todas as hipérboles $xy =$ constante são órbitas. A origem é o único ponto de equilíbrio.

9.2. **Retratos de fase em $\mathbb{R}^2$.** Para algumas EDO's não lineares em dimensão 2 podemos obter o retrato de fases de uma forma indirecta, sem conhecer as soluções. Escrevendo a equação diferencial na forma

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

temos que

$$f_2(x, y)x' = f_1(x, y)y'.$$

Se existirem funções $g_1(y)$ e $g_2(x)$ para as quais esta expressão é equivalente a

$$g_2(x)x' = g_1(y)y',$$

então

$$[G_2(x)]' = [G_1(y)]'$$

onde G_i é uma primitiva de g_i. Recorde que $(x, y) = (x(t), y(t))$ é solução da EDO. Integrando a expressão anterior,

$$G_2(x(t)) - G_2(x_0) = G_1(y(t)) - G_1(y_0).$$

Isto significa que para qualquer t

$$(x(t), y(t)) \in \Gamma_{(x_0,y_0)} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon F(u, v) = G_2(x_0) - G_1(y_0)\},$$

onde $F(u, v) = G_2(u) - G_1(v)$. Note que F é C^1 e

$$DF(u, v) = \begin{bmatrix} g_2(u) & -g_1(v) \end{bmatrix}.$$

Para os pontos (u, v) que verifiquem $(g_1(v), g_2(u)) \neq (0, 0)$, o conjunto Γ é uma curva. Se Γ não contém pontos de equilíbrio, então é uma órbita. Além disso, se for uma curva fechada, a órbita é periódica.

Exemplo 9.7.

$$\begin{cases} x' = y(1 + x^2 + y^2) \\ y' = -2x(1 + x^2 + y^2). \end{cases}$$

O único ponto de equilíbrio é $(0, 0)$. Temos também que

$$-2x(1 + x^2 + y^2)x' = y(1 + x^2 + y^2)y'$$

é equivalente a

$$-2xx' = yy'.$$

Logo, $(-x^2)' = (y^2/2)'$, o que implica que

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = x_0^2 + \frac{y_0^2}{2}.$$

Ou seja, as soluções estão em elipses. Como o único ponto de equilíbrio é a origem, todas as outras órbitas são fechadas. Como $x' > 0$ para $y > 0$, as órbitas assumem o sentido de rotação horário.

10. Estabilidade

10.1. **Definições.** A solução $y(t)$ é *estável* se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que qualquer outra solução $\overline{y}(t)$ satisfazendo

$$\|y(0) - \overline{y}(0)\| < \delta$$

temos que

$$\|y(t) - \overline{y}(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

A solução $y(t)$ é *assimptoticamente estável* se existe $\delta > 0$ tal que qualquer outra solução $\overline{y}(t)$ satisfazendo

$$\|y(0) - \overline{y}(0)\| < \delta$$

temos que

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t) - \overline{y}(t)\| = 0.$$

Uma solução $y(t)$ é instável se não é estável.

10.2. **EDO linear homogénea com coeficientes constantes.** Considere o PVI $y' = Ay$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$, com $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Neste caso conhecemos as soluções, logo as suas estabilidades.

Proposição 10.1.

(1) *Qualquer solução é estável sse o ponto de equilíbrio é estável.*
(2) *Qualquer solução é assimptoticamente estável sse o ponto de equilíbrio é assimptoticamente estável.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 10.2. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os valores próprios de A, $\mu_1, \dots, \mu_k$ respectivas multiplicidades algébricas, e $n_1, \dots, n_k$ as multiplicidades geométricas. Então*

(1) *Se para todos $i = 1, \dots, k$ temos $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, então todas as soluções são assimptoticamente estáveis.*
(2) *Se existe i tal que $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, então todas as soluções são instáveis.*
(3) *Se existe $1 \leq m \leq k$ tal que $\operatorname{Re} \lambda_1 = \cdots = \operatorname{Re} \lambda_m = 0$, $\operatorname{Re} \lambda_{m+1} < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k < 0$ e*
   (a) *para qualquer $1 \leq j \leq m$ temos $n_j = \mu_j$, então todas as soluções são estáveis;*
   (b) *caso contrário todas as soluções são instáveis.*

Demonstração. Pela Proposição 10.1, basta estudarmos a estabilidade da solução de equilíbrio. Seja $y_0 \neq 0$ e a respectiva solução

$$y(t) = e^{tA} y_0 = S e^{tJ} S^{-1} y_0,$$

onde J é a forma normal de Jordan de A e S uma matriz mudança de base. Observe que as componentes do vector $e^{tA} y_0$ são combinações lineares de funções do tipo $t \mapsto t^j e^{t\lambda_i}$ com $1 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq d - 1$.

(1) Neste caso, para qualquer $0 > \lambda > \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$ existe uma constante $c > 0$ tal que o máximo dos valores absolutos das componentes de $e^{tA} y_0$ é inferior a $c e^{t\lambda}$ [10]. Logo, para outra constante $C > 0$, temos

$$\|y(t) - 0\| = \|e^{tA} y_0\| \leq C e^{t\lambda}.$$

Fazendo $t \to +\infty$, obtemos a estabilidade assimptótica (recorde que $\lambda < 0$).
(2) Quando existe i tal que $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, pelo menos uma das componentes de $e^{tA} y_0$ terá valor absoluto superior a $c e^{t \operatorname{Re} \lambda_i}$, para uma constante $c > 0$. Logo, temos instabilidade.
(3) * Exercício.

□

Exemplo 10.3. No exemplo 9.5 todas as soluções são estáveis pois os valores próprios da matriz são $\pm i$. A parte real é nula, mas cada tem multiplicidade geométrica igual à algébrica. No exemplo 9.6 todas as soluções são instáveis devido a termos um valor próprio positivo.

[10] Mostre isto.

10.3. *** EDO linear homogénea com coeficientes variáveis.** Considere a EDO

$$y' = A(t)y,$$

sendo $A(t)$ uma função matricial contínua e periódica. Sabemos do teorema de Floquet que a matriz solução fundamental é dada por

$$X(t) = P(t)e^{tB}$$

onde P é periódica e $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Os valores próprios de B são os expoentes de Floquet. Recorde também a fórmula (1) para a soma dos expoentes de Floquet.

Teorema 10.4. *O Teorema 10.2 é válido aqui usando os valores próprios de B.*

Exercício 10.5. Prove o teorema anterior.

Exemplo 10.6. Seja

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & b \\ a & \frac{3}{2} + \sin t \end{bmatrix}$$

com período $T = 2\pi$. Como

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tr} A(s)\, ds = 4\pi,$$

usando (1), ficamos com a soma dos expoentes de Floquet $\operatorname{Re}(\lambda_1+\lambda_2) = 2 > 0$. Logo, pelo menos um dos expoentes tem parte real positiva, e a solução de equilíbrio é instável.

10.4. **Estabilidade de pontos de equilíbrio de EDOs não lineares.** Considere a EDO $y' = f(y)$ com o ponto de equilíbrio y^*, i.e. $f(y^*) = 0$. Assumimos que f é C^2 para escrevermos a fórmula de Taylor de f de ordem 1 numa vizinhança de y^*:

$$\begin{aligned} (y - y^*)' &= f(y) \\ &= Df(y^*)(y - y^*) + \mathcal{O}(\|y - y^*\|^2) \\ &\simeq Df(y^*)(y - y^*). \end{aligned}$$

Será que podemos relacionar o retrato de fases de $y' = f(y)$ numa vizinhança do ponto de equilíbrio, com as soluções da EDO linearizada $x' = Ax$, onde $x = y - y^*$ e $A = Df(y^*)$, dadas por e^{tA}? Nalguns casos sim, conforme o seguinte importante resultado indica.

Teorema 10.7 (Hartman-Grobman)**.** *Se $A = Df(y^*)$ tem valores próprios λ_i com $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, então existe um homeomorfismo*[11] *$h\colon V \to U$, onde V é uma vizinhança de 0 e U vizinhança de y^*, tal que a solução para a condição inicial $y_0 \in U$ é dada por*

$$y(t) = h \circ e^{tA} \circ h^{-1}(y_0).$$

[11] Um homeomorfismo é uma transformação bijectiva contínua com inversa também contínua. Preserva as órbitas e as propriedades topológicas.

Demonstração. Visite a biblioteca. □

A mudança de coordenadas h preserva as órbitas, apenas distorcendo a sua forma mas mantendo todas as características topológicas. Em particular, a estabilidade é preservada. Assim, no caso dos valores próprios da derivada no ponto de equilíbrio terem parte real não nula, podemos usar os critérios do teorema 10.2 para o sistema linearizado.

Corolário 10.8. *Se $A = Df(y^*)$ tem valores próprios λ_i com $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, e*

(1) $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ *para todo i, y^* é assimptoticamente estável;*
(2) *caso contrário é instável.*

Exemplo 10.9. $x' = x - x^3 - xy^2$, $y' = 2y - y^5 - yx^4$. A derivada do campo vectorial é

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -2xy \\ -4x^3y & 2 - 5y^4 - x^4 \end{bmatrix}.$$

Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$, $(0, \pm\sqrt[4]{2})$, $(\pm 1, 0)$. Calculando a derivada nestes pontos, e depois os valores próprios, concluímos que $(0,0)$ e $(\pm 1, 0)$ são instáveis e $(0, \pm\sqrt[4]{2})$ são assimptoticamente estáveis.

11. Problemas de valor fronteira PVF

11.1. **Condições fronteira.** Uma nova classe de problemas surge quando consideramos uma EDO cuja solução tem que satisfazer condições fronteira em lugar de condições iniciais. Vamos restringir-nos a exemplos concretos.

Dado $\mu \in \mathbb{R}$, considere a EDO de 2ª ordem

$$y'' + \mu y = 0$$

com a condição fronteira

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Ou seja, queremos encontrar uma função $y(t)$ definida em $[0,1]$ que satisfaça as condições anteriores.

Se $\mu = 0$, a solução é

$$y(t) = c_1 t + c_2$$

onde as constantes c_1 e c_2 são dadas pelas condições fronteira:

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Isto é, apenas a função nula é solução.

Consideramos agora o caso $\mu \neq 0$. A EDO pode ser reduzida a

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos a solução

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} e^{t\sqrt{-\mu}} & 0 \\ 0 & e^{-t\sqrt{-\mu}} \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix},$$

onde S é uma matriz mudança de base. O que implica que

$$y(t) = c_1 e^{t\sqrt{-\mu}} + c_2 e^{-t\sqrt{-\mu}},$$

onde as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ podem ser determinadas a partir da condição fronteira. Assim, obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\mu}} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2, \\ c_1(e^{2\sqrt{-\mu}} - 1) = 0 \end{cases}$$

Além da solução trivial $c_1 = c_2 = 0$ (o que determina a solução nula $y(t) = 0$), temos mais soluções quando $e^{2\sqrt{-\mu}} = 1 = e^{2\pi i k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Neste último caso, se $\mu = (\pi k)^2$ com $k \in \mathbb{Z}$, para qualquer c_1 obtemos a solução

$$y(t) = c_1 e^{t\pi i k} - c_1 e^{-t\pi i k} = 2c_1 i \sin(t\pi k).$$

Existem assim infinitas soluções, uma para cada valor de c_1. Um exemplo será com $c_1 = -i/2$, correspondendo à solução $\sin(t\pi k)$. Note que não temos unicidade de soluções.

Em conclusão, para $\mu = (\pi k)^2$ temos soluções na forma $y(t) = C\sin(t\pi k)$, $C \in \mathbb{R}$. Para os outros valores de μ, apenas a solução nula.

12. * Exemplos de EDP's

Se tivermos uma função com mais do que uma variável, uma equação que envolva a função e as suas derivadas parciais é chamada de equação às derivadas parciais (EDP). Vamos apenas estudar o caso de duas variáveis. Procuramos uma função $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que seja solução da EDP e de restrições adicionais que se considerem [12].

As derivadas parciais de $u(x,t)$ irão ser representadas por

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{etc.}$$

Exemplo 12.1. Exemplos de PDE's.

(1) Equação do calor: $u_{xx} = u_t$.
(2) Equação das ondas: $u_{xx} = u_{tt}$.
(3) Equação de Laplace: $u_{xx} + u_{tt} = 0$.

[12] As EDO's são uma classe particular de EDP's, quando as equações apenas envolvem derivadas parciais de uma única variável.

Este tema é muito vasto sem uma teoria geral, pelo que vamos só apresentar dois exemplos de problemas com a equação do calor. O objectivo é reduzir a EDP a uma EDO escolhendo adequadamente a forma da solução.

12.0.1. *Equação do calor com condição inicial.* Considere a equação do calor $u_{xx} = u_t$. Procuramos soluções $u(x,t)$ que sejam funções C^2 em

$$\Omega :=]0,1[\times \mathbb{R}^+$$

e contínuas em $\overline{\Omega} = [0,1] \times \mathbb{R}_0^+$. Começamos por escolher só uma condição inicial:

$$u(x,0) = f(x)$$

onde $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ é C^1. Temos assim que

$$f(x) = S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{2\pi i k x}.$$

O método de separação de variáveis consiste em procurar soluções na forma

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) e^{2\pi i k x}$$

onde $u_k(t)$ é uma função da variável t. Assumimos que u existe e é C^2 em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$ (para que possamos derivar a série termo a termo). Aplicando às condições do problema, queremos encontrar uma forma explícita de u e verificar se de facto tem a regularidade que considerámos inicialmente.

Da equação inicial, obtemos

$$u_k(0) = f_k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Da EDP,

$$u_k'(t) = -(2\pi k)^2 u_k(t), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Isto significa que para cada k temos uma EDO com solução:

$$u_k(t) = e^{-t(2\pi k)^2} u_k(0).$$

Assim,

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{-t(2\pi k)^2} e^{2\pi i k x}.$$

Em particular,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = f_0.$$

12.0.2. *Equação do calor com condição inicial e fronteira.* Vamos resolver mais uma vez o problema anterior, considerando agora as seguintes restrições extra:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

chamadas de condições fronteira. De forma a que a solução seja contínua em $\overline{\Omega}$ temos que ter tambéma condição inicial a satisfazer $f(0) = f(1) = 0$.

Nestas condições, é útil escrever a função f como uma série de senos:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin(\pi n x),$$

bastando para isso calcular a série de Fourier da extensão ímpar de f a $[-1,1]$. Assim, temos logo $f(0) = f(1) = 0$.

A escolha natural de solução é assim

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t) \sin(\pi n x),$$

pois verifica $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos então $u_n(t) = b_n$ e a EDO

$$u_n' = -(\pi n)^2 u_n.$$

Finalmente,

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e^{-(\pi n)^2 t} \sin(\pi n x).$$

Apêndice A. Álgebra linear: forma canónica de Jordan

A.1. **Valores e vectores próprios de matrizes.** Considere $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, i.e. uma matric $d \times d$ com coeficientes em $\mathbb{C}$. Recorde que os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Como p é um polinómio de grau d, a matriz A terá entre um e d valores próprios distintos, que denotamos por

$$\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{C},$$

para algum $1 \leq k \leq d$. Note que podemos escrever o polinómio característico na forma

$$p(\lambda) = (-1)^d \prod_i^k (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i},$$

onde as multiplicidades algébricas μ_i satisfazem as relações

$$1 \leq \mu_i \leq d, \qquad \sum_{i=1}^k \mu_i = d.$$

Para cada valor próprio λ podemos resolver a equação $Av = \lambda v$ para encontrarmos os vectores próprios v. Assim, para λ_i teremos n_i vectores próprios linearmente independentes

$$v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}.$$

O número n_i é a multiplicidade geométrica e satisfaz a relação

$$1 \leq n_i \leq \mu_i.$$

Temos então

$$r = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

vectores próprios.

A equação $Av = \lambda v$ é equivalente a $(A - \lambda I)v = 0$. Ou seja, um vector próprio v pertence ao núcleo da matriz $A - \lambda I$, denotado por $\ker(A - \lambda I)$. Os vectores próprios formam assim uma base desse espaço linear.

O espaço imagem $\operatorname{Im}(A - \lambda I)$ de $A - \lambda I$ é gerado pelas colunas.

A.2. **Cadeias e blocos de Jordan.** Para cada vector próprio $v_{i,j}$ de λ_i, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n_i$, construímos uma sequência de vectores próprios generalizados $w_{i,j,\ell}$ como soluções não triviais das equações

$$(A - \lambda_i I)w_{i,j,k} = w_{i,j,k-1}, \quad k \geq 1.$$

onde usámos $w_{i,j,0} := v_{i,j}$. Logo, $w_{i,j,k} \in \ker(A - \lambda_i I)^{k+1}$. Por outro lado, a equação acima só tem solução se $w_{i,j,k-1} \in \operatorname{Im}(A - \lambda_i I)^k$. Ou seja, procuramos soluções tais que

$$w_{i,j,k} \in \ker(A - \lambda_i I)^{k+1} \cap \operatorname{Im}(A - \lambda_i I).$$

Em particular, cada vector próprio tem de satisfazer

$$v_{i,j} \in \ker(A - \lambda_i I) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda_i I).$$

O inteiro $m_{i,j} \geq 0$ indica o número máximo de vectores próprios generalizados na sequência gerada pelo vector próprio $v_{i,j}$.

A cadeia de Jordan $S_{i,j}$ do vector próprio $v_{i,j}$ é definida como a matriz cujas colunas são $v_{i,j}$ e os respectivos vectores próprios generalizados:

$$S_{i,j} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{i,j} & w_{i,j,1} & \dots & w_{i,j,m_{i,j}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{d \times (m_{i,j}+1)}.$$

Exercício A.1. Mostre que cada cadeia de Jordan $S_{i,j}$ é linearmente independente, i.e. tem característica igual a $m_{i,j} + 1$.

Note que

$$\begin{aligned} AS_{i,j} &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_i v_{i,j} & \lambda_i w_{i,j,1} + v_{i,j} & \dots & \lambda_i w_{i,j,m_{i,j}} + w_{i,j,m_{i,j}-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{d\times(m_{i,j}+1)} \\ &= S_{i,j} J_{i,j}, \end{aligned}$$

onde

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{(m_{i,j}+1)\times(m_{i,j}+1)}.$$

é chamado bloco de Jordan.

Observação A.2. Cada bloco de Jordan que não seja 1×1 tem a forma $J_{i,j} = \lambda_i I + N$, onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{(m_{i,j}+1)\times(m_{i,j}+1)}$$

é nilpotente pois $N^{m_{i,j}+1} = 0$, mas $N^{m_{i,j}} \neq 0$.

A.3. **Forma normal de Jordan.** A forma normal de Jordan é definida como a matriz dos blocos de Jordan, i.e.

$$J = \begin{bmatrix} J_{1,1} & & & \\ & J_{1,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k,n_k} \end{bmatrix}$$

Definimos também a matriz S juntando as colunas de todas as cadeias de Jordan $S_{i,j}$ da seguinte forma

$$S = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{k,n_k} \end{bmatrix}.$$

Assim temos

$$AS = SJ.$$

Exercício A.3. Mostre que o conjunto de todas as cadeias de Jordan S é linearmente independente.

Teorema A.4. *J e S são matrizes $d \times d$ e $\det S \neq 0$. Logo,*

$$A = SJS^{-1}.$$

Demonstração. Basta provar que existem d vectores próprios e vectores próprios generalizados, e que são todos linearmente independentes. A parte da independência linear segue do Exercício A.3. Como há r vectores próprios, equivale a provar que o número total de vectores próprios generalizados é igual a $d - r$.

Vamos supor que só existem k vectores próprios e vectores próprios generalizados, com $k < d$, que geram o espaço linear V. Seja $z_1, \dots z_{d-k}$ uma base do espaço linear complementar de V. Na base

[...]

□

Exercício A.5. Mostre que

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n_i} (m_{i,j} + 1).$$

Observação A.6.

(1) A matriz J é única a menos de permutações de blocos de Jordan. Sendo $r = \sum_{i=1}^{k} n_i$ o número de blocos de Jordan em J.
(2) Se tivermos para todo o $i = 1, \dots, k$ a igualdade $n_i = \mu_i$, a matriz A é diagonalizável.
(3) Se $k = d$, então A é diagonalizável. Isto é, sempre que tivermos d valores próprios distintos, a matriz é diagonalizável.

Exemplo A.7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico é dado por $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 \lambda$. Assim, os valores próprios e correspondentes multiplicidades algébricas são:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0, \quad \mu_2 = 1.$$

Resolvendo as equações $(A - \lambda_i I)v = 0$, obtemos um vector próprio para cada λ_i, logo $n_1 = n_2 = 1$. Eles são $v_{1,1} = (1, 0, 0)$ para λ_1 e $v_{2,1} = (0, 0, 1)$ para λ_2. Vamos agora determinar os vectores próprios generalizados para $v_{1,1}$. O vector $w_{1,1,1} = (0, 1, 0)$ satisfaz a equação $(A - \lambda_1 I)w_{1,1,1} = v_{1,1}$. Por outro lado, $(A - \lambda_1 I)u = w_{1,1,1}$ não tem solução, pelo que $w_{1,1,1}$ é o único vector próprio generalizado de $v_{1,1}$. Finalmente, não há vectores próprios generalizados de $v_{2,1}$ pois $(A - \lambda_2 I)w_{2,1,1} = v_{2,1}$ não tem solução.

Exemplo A.8. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

tem o único valor próprio $\lambda = 1$ com $\mu = 4$. Os vectores próprios são $v_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 0)$. Há um vector próprio generalizado w_1 de v_1 solução de $(A - I)w_1 = v_1$ e dado por $w_1 = (0, 1, 0, 0)$. Já não conseguimos resolver $(A - I)u = w_1$ como facilmente se verifica. Por outro lado, temos também só um vector próprio generalizado w_2 de v_2, resolvendo $(A - I)w_2 = v_2$, com $w_2 = (0, 0, 0, 1)$.

Apêndice B. Exponencial de matrizes

A exponencial de uma matriz $B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ é definida como

$$e^B = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} B^n.$$

Proposição B.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.*

(1) *Se A é diagonal, i.e.*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{bmatrix},$$

então

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_d} \end{bmatrix}.$$

(2) *Se $S \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$.*
(3) *Se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A\, e^B$.*
(4) *$e^{(t+s)A} = e^{tA}\, e^{sA}$, $t, s \in \mathbb{R}$.*

Exercício B.2. Demonstre a proposição anterior.

Recorde que A é diagonalizável se existir S invertível tal que $S^{-1}AS$ é diagonal. A proposição acima implicam que para qualquer matriz diagonalizável, a exponencial é muito simples de calcular.

Uma matriz quadrada N é nilpotente se tem uma potência que se anula, i.e. existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N^n = 0$. A ordem de N é a menor potência n que satisfaz $N^n = 0$.

Exercício B.3.

(1) Determine o determinante de uma matriz nilpotente.
(2) Calcule os valores próprios de uma matriz nilpotente.
(3) Mostre que uma matriz N é nilpotente sse $\det(\lambda I - N) = \lambda^d$.
(4) Calcule a exponencial de uma matriz nilpotente.

É simples calcular a exponencial de um bloco de Jordan $J_{i,j}$:

$$\begin{aligned} e^{tJ_{i,j}} &= e^{t\lambda_i}e^{tN} \\ &= e^{t\lambda_i}\sum_{n=0}^{m_{i,j}}\frac{t^n}{n!}N^n \\ &= e^{t\lambda_i}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{m_{i,j}}}{m_{i,j}!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_{1,1}} & & & \\ & e^{tJ_{1,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_{k,n_k}} \end{bmatrix}$$

e

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}.$$

Exemplo B.4. Se $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tem um único valor próprio λ, i.e. $\mu = d$, então $A = S(\lambda I + \tilde{N})S^{-1} = \lambda I + B$ onde $\tilde{N}$ e $B = S\tilde{N}S^{-1}$ são nilpotentes com $\tilde{N}^q = 0$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$e^{tA} = e^{\lambda t}e^{tB} = e^{\lambda t}\left(I + tB + \cdots + \frac{t^{q-1}B^{q-1}}{(q-1)!}\right).$$

Esta fórmula é muito útil pois não necessitamos de calcular S, uma vez que $B = A - \lambda I$.

Exemplo B.5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Os valores próprios são $i, -i, 2$. Como $k = 3$, a matriz é diagonalizável, com $J = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$. Para determinarmos e^{tA} necessitamos de encontrar a matriz S que reduz A a J, i.e. os vectores próprios e vectores próprios generalizados. Esse cálculo fica como exercício.

Exemplo B.6.

Referências

[1] M. Braun. *Differential Equations and Their Applications*. Springer, 4th Ed, 1993.
[2] V. I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer, 3rd Ed, 1987.

Departamento de Matemática, ISEG, Universidade de Lisboa, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal

Email address: jldias@iseg.ulisboa.pt