Tópicos de Investigação Operacional

Exame de Época Normal - tópicos de resolução

18-06-2024 **Duração: 1h30**

Nome: ______________________________ **Nº** __________

Este documento tem 6 páginas.
Responda às questões aqui no enunciado.
Bom trabalho!

Questão	1	2	3	4	5	total
Cotação	24	50	55	45	26	200
Classificação						

- Justifique todas as respostas e identifique o modelo utilizado.
- Apresente as respostas nas unidades apropriadas no contexto do problema.
- Para cálculos auxiliares, utilize aproximações com duas casas decimais.
- Quando necessário assuma que um ano tem 360 dias, um mês tem 30 dias e que uma semana tem 7 dias.

1. Nas seguintes alíneas selecione a resposta correta e, excepto na alínea (a), justifique brevemente a resposta. Uma resposta certa e bem justificada, vale 0,8 valores. Uma resposta certa, mas, mal ou não justificada, vale 0 valores. Uma resposta errada, quer esteja justificada ou não, vale -0,2 valores.

(a) (Apenas esta alínea não precisa de justificação.) O tempo que decorre entre o momento da realização da encomenda e a recepção da encomenda é chamado de

○ ponto de encomenda ○ ciclo de segurança ○ tempo de encomenda
○ taxa de reabastecimento ⊗ tempo de reaprovisionamento ○ ciclo de encomenda

(b) Se a quantidade a encomendar for de 1000 unidades, o custo de encomenda de 200 u.m. por encomenda, e a procura anual for de 5000 unidades, qual é o custo de armazenamento por unidade? ○ 1000 ○ 100 ○ 10 ○ 5 ⊗ 2 ○ outro: __________

dados: $Q^* = 1000$; $K = 200$; $D = 5000/\text{ano}$; $h =?$; unidade de tempo = 1 ano;
no modelo determinístico básico a quantidade a encomendar é $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$,
logo, neste caso, $1000 = \sqrt{\frac{2\times200\times5000}{h}} \iff h = \frac{2\times200\times5000}{1000^2} = 2$

(c) Se a procura anual de determinado produto for de 8000 unidades, o tempo de reaprovisionamento de 3 dias e inferior ao ciclo de encomenda, e assumindo que o número de dias por ano é de 200, então o ponto de encomenda deste produto é

○ 133,33 ⊗ 120 ○ 110 ○ 40 ○ outro: __________

dados: $D = 8000/\text{ano}$; $L = 3$ dias; $P_e =?$ unidade de tempo = 1 dia;
no modelo determinístico básico o ponto de encomenda é $P_e = DL$, quando $L < T$
notar que 1 ano = 200 dias; como a procura $D = 8000/\text{ano}$ teremos $\bar{D} = \frac{8000}{200} = 40/\text{dia}$
logo $P_e = \bar{D}L = 40 \times 3 = 120$

2. Uma empresa requer 1000 unidades de determinado material por mês. O custo de encomenda é de 100 u.m. e o custo de cada unidade de material é de 10 u.m.. O custo anual de armazenamento é 15% do custo unitário do material. O fornecedor demora 15 dias a fazer a entrega da encomenda, e a empresa estimou o custo anual de rutura em 3 u.m. por unidade.

   (a) Determine a quantidade ótima da encomenda, o nível máximo de stock e o número máximo de unidades em rutura.

   (b) Indique o custo e o plano completo de encomenda (quanto encomendar, quantas vezes e quando).

dados: $D = 12 \times 1000 = 12000$ unidades/ano; $K = 100$ u.m./encomenda; $c = 10$ u.m./unidade; $h = 0,15 \times 10 = 1,5$ u.m./unidade/ano; $L = 15$ dias; $p = 3$ u.m./unidade; unidade de tempo $= 1$ ano

Modelo determinístico com rutura permitida e tempo de entrega não instantâneo.

Assim

$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2\times100\times12000}{1{,}5}} \sqrt{\frac{3+1{,}5}{3}} = 1549,19$ unidades;

$S^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2\times100\times12000}{1{,}5}}\sqrt{\frac{3}{3+1{,}5}} = 1032,80$ unidades;

o nível de rutura máximo é $Q^* - S^* = 516,39$

$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{1549{,}19}{12000} = 0,13$ anos, ou seja $0.13 \times 360 = 46,8 \approx 47$ dias $\approx 1,56$ meses;

$\frac{1}{T^*} = \frac{1}{0.13} = 7,69$ é o número de encomendas a realizar por ano;

$CTUT(Q^*, S^*) = \sqrt{2KDh} \sqrt{\frac{p}{p+h}} + cD = \sqrt{2 \times 100 \times 12000 \times 1,5} \sqrt{\frac{3}{3+1{,}5}} + 10 \times 12000 = 121549,19$ u.m..

Uma vez que $L = 15$ dias ou seja $L = 15/360 = 0,04$ anos, e $L < T^* = 0,13$ anos, o ponto de encomenda é $P_e = DL - (Q^* - S^*) = 0,04 * 12000 - 516,39 = 480 - 516,39 = -16,36$.

(a) A quantidade ótima de encomenda é $Q^* = 1549,19$ unidades e o nível máximo de unidades em rutura é $Q^* - S^* = 516,39$. Aquando da chegada da encomenda o nível de stock ficará nas $1\ 032,80$ unidades, que é o nível máximo de stock.

(b) A empresa deve encomendar $1549,19$ unidades a cada 47 dias (0,13 anos), o que significa que irá fazer cerca de $7,69$ encomendas por ano. Uma vez que o tempo de reaprovisionamento é de 15 dias, o ponto de encomenda é $-16,36$ pelo que a encomenda terá de ser realizada quando existirem $16,36$ unidades em rutura. O custo total anual é de $121\ 549,19$ u.m..

3. Uma grande oficina possui um stock de válvulas necessárias para determinada máquina. A procura anual média para estas válvulas é de 1600 unidades. Cada válvula custa 25 u.m. e é fabricada mediante encomenda. Estima-se que o custo de encomenda seja de 2000 u.m.. Os custos anuais de armazenamento das válvulas são de 20% do custo de cada válvula e o custo de rutura de stock é de 6 u.m. por unidade. Uma pesquisa empírica mostrou que a procura, durante o tempo de reaprovisionamento, segue uma distribuição uniforme entre 0 e 1500 unidades.

   (a) Determine o número esperado de unidades em rutura durante o ciclo de encomenda.

   (b) Determine o ponto de encomenda e proponha um plano ótimo de encomenda (quanto encomendar, quando, quantas vezes, e custo).

   (c) Caso a empresa pretenda assegurar um stock de segurança que garanta que a probabilidade de existir rutura durante o tempo de reaprovisionamento seja, no máximo, de 0,1, de quanto deve ser o nível do stock de segurança e qual é o ponto de encomenda? O custo total anual sofrerá alguma variação?

dados: $\delta = 1600$ unidades/ano; $K = 2000$ u.m./encomenda; $c = 25$ u.m./unidade; $h = 0,2 \times 25 = 5$ u.m./unidade/ano; $p = 6$ u.m./unidade/ano; $X \sim \mathcal{U}(0, 1500)$; unidade de tempo = 1 ano

Modelo estocástico com revisão contínua, com rutura permitida e tempo de entrega não instantâneo.

Uma vez que a variável aleatória X, que modela a procura durante o tempo de reaprovisionamento, segue uma distribuição uniforme entre 0 e 1500 de média $\mu = \frac{0+1500}{2} = 750$ temos

$Q^* = \sqrt{\frac{2\delta K}{h}} \sqrt{\frac{p\delta}{p\delta - 2\mu}} = \sqrt{\frac{2\times1600\times2000}{5}} \sqrt{\frac{6\times1600}{6\times1600 - 2\times750}} = \sqrt{1\ 280\ 000} \sqrt{\frac{9\ 600}{9\ 600 - 1500}} = 1\ 231,68$

$P_e^* = 2\mu(1 - \frac{hQ^*}{p\delta}) = 2 \times 750 \times (1 - \frac{5\times1\ 231,68}{6\times1600}) = 537,75$

$\psi(P_e^*) = \frac{(2\mu - P_e^*)^2}{4\mu} = \frac{(2\times750 - 537,75)^2}{4\times750} = \frac{(1050)^2}{3000} = 308,64$

$CTUT(Q, P_e) = \frac{K\delta}{Q} + c\delta + h(\frac{Q}{2} + P_e - \mu) + \frac{p\delta\psi(P_e)}{Q} = \frac{2000\times1600}{1\ 231,68} + 25 \times 1600 + 5 \times (\frac{1\ 231,68}{2} + 537,75 - 750) + \frac{9600\times308,64}{1\ 231,68} = 2598,08 + 40000 + 2017,95 + 2405,61 = 47021,64$

   (a) O número esperado de unidades em rutura durante o ciclo de encomenda é $\psi(P_e^*) = 308,64$ unidades.

   (b) A quantidade ótima a encomendar é $Q^* = 1\ 231,68$ unidades. O ponto de encomenda é $P_e^* = 537,75$. O plano de encomenda da empresa deve consistir em encomendar $Q^* = 1\ 231,68$ unidades, sempre que o nível de inventário atingir $P_e^* = 537,75$ unidades. Deve fazê-lo a cada $T^* = \frac{Q^*}{\delta} = \frac{1\ 231,68}{1600} = 0,77$ anos, fazendo $\frac{1}{T^*} = 1,3$ encomendas por ano. O custo anual deste plano é de $47021,64$ u.m..

   (c) Neste caso, modelo com stock de segurança, pretendemos que $P(X > P_e) \leq 0,1 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq P_e) \leq 0,1 \Leftrightarrow 1 - F_X(P_e) \leq 0,1 \Leftrightarrow F_X(P_e) \geq 0,9 \Leftrightarrow \frac{P_e}{1500} \geq 0,9 \Leftrightarrow P_e \geq 1\ 350$ sendo o stock de segurança de $B = P_e - \mu = 1350 - 750 = 600$. O que significa que a empresa terá de realizar a encomenda, mais cedo que na abordagem anterior, quando o nível de stock estiver nas 600 unidades e não nas $537,75$.

   Podemos dizer que o custo anual desta abordagem será

   . igual ao anterior, quanto ao custo de encomenda,

   . superior ao anterior, quanto ao custo de armazenamento, e

   . inferior ao anterior, quanto ao custo de rutura.

   Uma vez que o ponto de encomenda aumenta, a encomenda terá de ser realizada mais cedo e os custos de armazenamento aumentam. Contudo os custo de rutura serão menores.

4. O João quer abrir uma cafetaria e pretende efetuar um estudo de simulação para determinar se o número de funcionários previstos é suficiente. A cafetaria apenas tem serviço ao balcão e pretende colocar dois funcionários a atender ao balcão e um funcionário na caixa de pagamento. A chegada de clientes segue uma distribuição de Poisson de média 30 por hora e há lugar na cafetaria para apenas 10 clientes em fila. Cada cliente é atendido ao balcão em 1 minuto em média e demora 0,5 minutos para pagar. O pagamento é sempre efetuado logo após serem atendidos. Dos clientes que entram prevê-se que 75% vão apenas buscar pão, os restantes, sentam-se nas mesas disponíveis (considerar que há sempre lugar), demorando-se na cafetaria 5 minutos, em média.

   (a) Indique as entidades deste sistema.

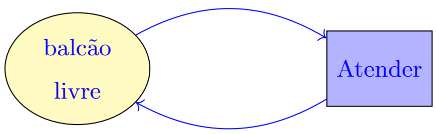
   (b) Construa os diagramas de ciclo de vida.

   (c) Faça um esboço do esquema da simulação a realizar no software SIMUL8. Ao efetuar este esquema indique, sempre que necessário, as características a definir de cada elemento do esquema. Tenha também em conta que o João pretende conhecer o tempo médio de ciclo por tipo de cliente, o tempo de ocupação dos funcionários, o comprimento máximo e médio das filas de espera, e o número de clientes que não entra por a cafetaria estar cheia.

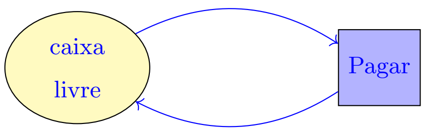
(a) As entidades são os funcionários e os clientes.

(b) Os diagramas de ciclo de vida das entidades são:

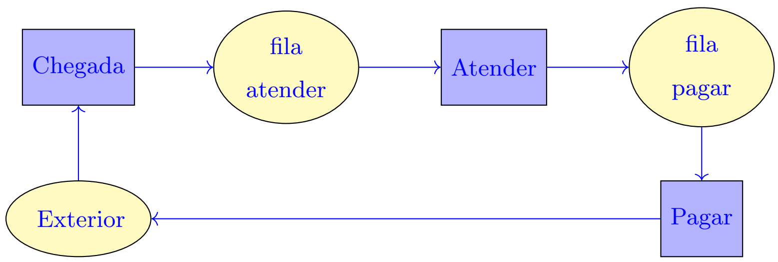
- dos funcionários ao balcão



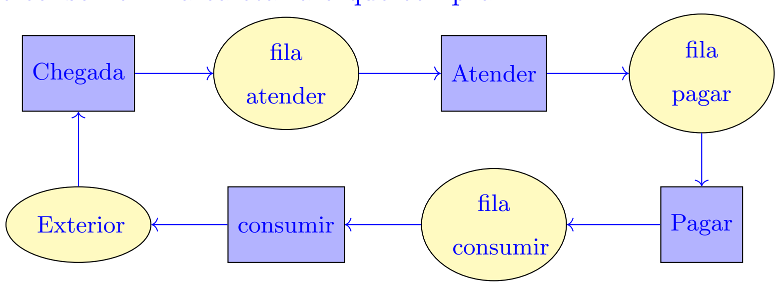
- do funcionário da caixa de pagamento



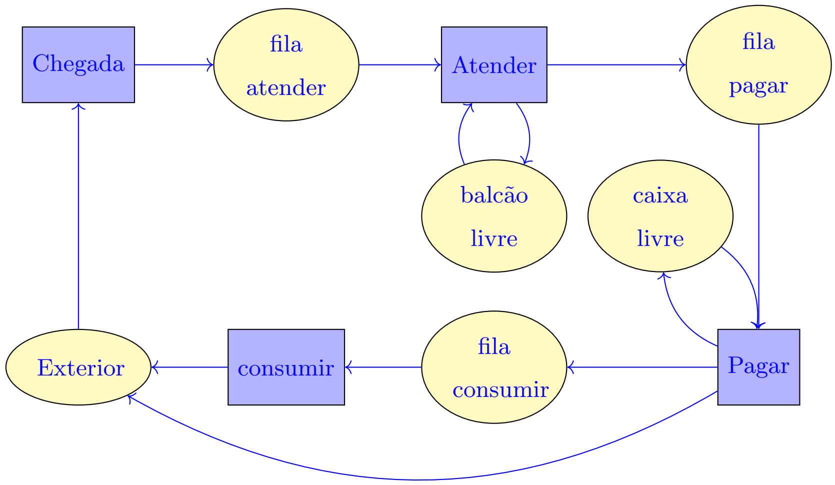
- dos clientes que apenas compram pão



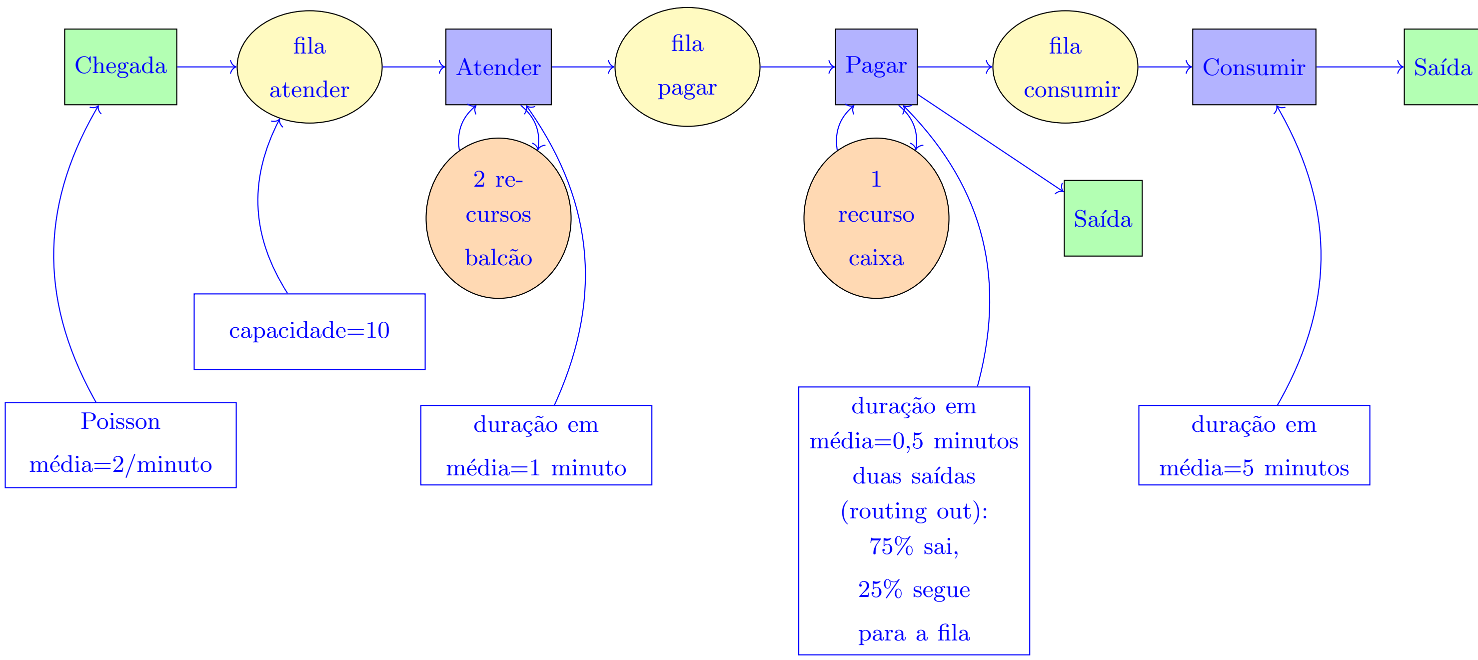
- dos clientes que consomem na cafetaria o que compram



Já agora fica aqui também o ciclo de atividades:



(c) O esboço do esquema da simulação no SIMUL8 é



Notas:

média 30/hora = 2/minuto

5. A procura determinística anual de determinado produto é de D unidades. O custo de encomenda é de K u.m., o custo unitário é de c u.m., e o custo de armazenamento é de h u.m. por unidade e por ano. Considera-se ainda que o custo de rutura é de p u.m. por unidade e por ano. Explique o que entende por valor ótimo da encomenda e deduza, explicando todos os passos, a formulação que lhe permite obter o valor ótimo da encomenda quando considera a procura determinística.

valor ótimo da encomenda é a solução ótima do modelo (determinístico) de stock adequado ao problema, é a quantidade que deve ser encomendada em cada ciclo de encomenda que minimiza todos os custos da encomenda

dados: D unidades/ano; K u.m./encomenda; c u.m./unidade; h u.m./unidade/ano; p u.m./unidade; unidade de tempo = 1 ano;

Modelo determinístico com rutura permitida.

seja Q a quantidade a encomendar e $T = \frac{Q}{D}$ o (tempo do) ciclo da encomenda,

o custo total da encomenda é $K + cQ$ e por ano (ou seja, por unidade de tempo) é $\frac{K+cQ}{T} = \frac{KD}{Q} + cD$ (note que o número de encomendas por ano é $\frac{D}{Q}$, logo o custo total da encomenda por ano é $\frac{D}{Q}K + cD = \frac{DK+cDQ}{Q} = \frac{D}{Q}(K + cQ) = \frac{K+cQ}{T}$)

o custo total do armazenamento depende do nível médio da quantidade armazenada. Sendo S o valor máximo que o inventário atinge, sabemos que o nível de inventário no momento t é dado por $I(t) = -Dt + S$. O nível mínimo que o armazenamento atinge é, obviamente, 0 e esse nível é atingido quando $I(t) = 0$, ou seja no momento $t = \frac{S}{D}$. Ou seja, só existe material armazenado durante o ciclo da encomenda desde o momento 0 do ciclo, o momento em que a encomenda é recebida, até ao momento $\frac{S}{D}$, o momento em que o nível atinge o valor 0. O nível médio de inventário, que é $\frac{S^2}{2D}$, pode ser obtido de duas formas:

- obtendo o valor médio $\frac{\max + \min}{2}$ e tendo em atenção o intervalo de tempo em que existe armazenamento; o valor médio é $\frac{\max + \min}{2} = (\frac{S+0}{2})$ e existe armazenamento no intervalo de tempo $[0, \frac{S}{D}]$ assim o nível médio é $(\frac{S+0}{2}) \times (\frac{S}{D} - 0) = \frac{S^2}{2D}$;
- por integração $\int_0^{\frac{S}{D}} (-Dt + S)\, dt = \left[-\frac{Dt^2}{2} + St \right]_0^{\frac{S}{D}} = \frac{S^2}{2D}$.

Desta forma o custo de armazenamento, por ciclo de encomenda, é $h\ \frac{S^2}{2D}$, e por ano (ou seja, por unidade de tempo) é $h\ \frac{S^2}{2DT} = h\ \frac{S^2}{2Q}$

o custo total de rutura depende do nível médio da quantidade em rutura. No ciclo de encomenda há rutura a partir do momento em que o nível do inventário atinge o valor 0, que é no momento $\frac{S}{D}$, até ao momento T do fim do ciclo de encomenda (e momento de chegada de nova encomenda). Ou seja, intervalo de rutura é $[\frac{S}{D}, T]$ e o tempo de rutura é de $T - \frac{S}{D} = \frac{Q-S}{D}$. Nesse momento T o nível de inventário é $I(T) = -DT + S = -Q + S$, ou seja a maior quantidade em rutura é $|-Q + S| = Q - S$. Assim, o nível médio da quantidade em rutura é $\frac{Q-S}{2} \times \frac{Q-S}{D} = \frac{(Q-S)^2}{2D}$. Deste modo, o custo de rutura, por ciclo de encomenda, é $p\ \frac{(Q-S)^2}{2D}$, e por ano (ou seja, por unidade de tempo) é $p\ \frac{(Q-S)^2}{2DT} = p\ \frac{(Q-S)^2}{2Q}$

Concluindo, o custo total por unidade de tempo é $\frac{KD}{Q} + cD\ +\ h\ \frac{S^2}{2Q}\ +\ p\ \frac{(Q-S)^2}{2Q}$ que é uma função não linear de duas variáveis, a variável Q e a variável S.

O modelo que permite obter a quantidade ótima da encomenda é

$$\min_{Q,S\geq 0} \left(\frac{KD}{Q} + cD\ +\ h\ \frac{S^2}{2Q}\ +\ p\ \frac{(Q-S)^2}{2Q} \right)$$