Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia e Gestão

Matemática I – Semestre 2 - 2023/2024

Época de Recurso – 25 de Junho 2024

Duração: 2h30min

Versão A

Nome: ....

ID Estudante #: ....

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são independentes umas das outras.
- Não necessita de justificar as suas respostas.

(a) *(8)* Relativamente ao conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \right\},$$

pode dizer-se que:

1. A′= .... (derivado de A)

2. int(A)= ....

3. sup A = ...

4. Uma vez que $A \neq \text{ad}(A)$, pode-se concluir que A **não** é ....

(b) *(7)* Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo 2. Então:

1. $v_3 =$ ....

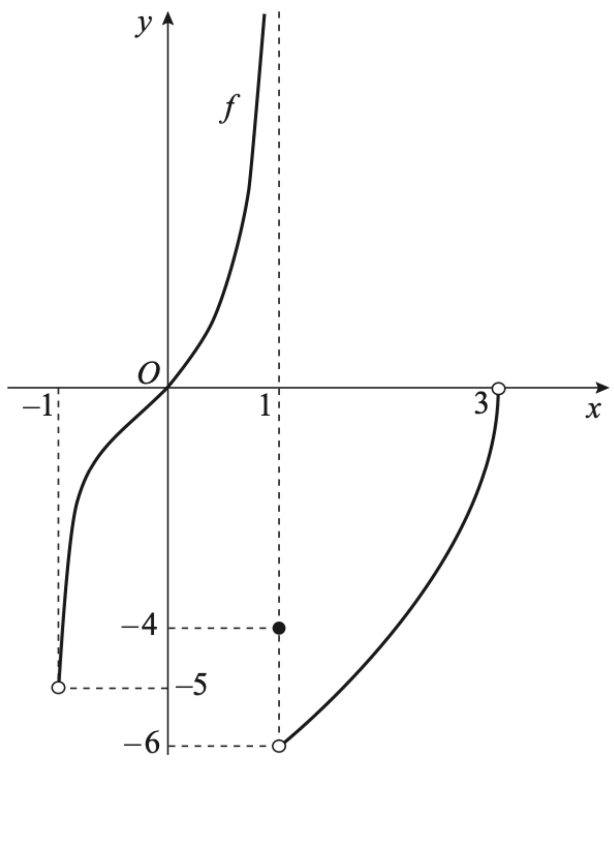
2. a sucessão $(v_n)_n$ é monótona ....

3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} v_n =$ ....

(c) *(6)* Na figura abaixo está representada, no referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1,3[$. Sabe-se que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad f(1) = -4$$

e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de termos em $]-1,1[$ tal que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$.



Então

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = \text{.........}$$

(d) *(10)* Considere a função $f : \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{5}\right).$$

Então:

1. $f(2) =$ .... e $f($...........$) = 0$

2. $f^{-1}(x) =$ ....

3. o contradomínio de f^{-1} é ....

(e) *(6)* Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \qquad \forall x \in [0,2], \quad 0 < f'(x) < 9.$$

O Teorema de Lagrange permite concluir que:

$$\ldots\ldots\ldots < f(2) < \ldots\ldots\ldots$$

(f) *(6)* Seja f a função definida por $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. O polinómio de Taylor de f de grau 2 em $x_0 = 0$ é:

$$P_0^2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(g) *(7)* Relativamente a uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabe-se que:

$$f'(x) = x - 3$$

Logo, conclui-se que:

- $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \ldots\ldots\ldots$

- f atinge um .... absoluto em $x = 3$;

- Uma possível expressão analítica para f é $f(x) =$ ....

(h) *(6)* Considere a função F, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = x^5 + \int_2^x e^{-t^2}\ \mathrm{dt}.$$

Logo, tem-se:

$$F'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(i) *(12)* No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ definidos por:

$$\overline{a} = (1, -2, 0), \quad \overline{b} = (4, 0, 3) \quad \overline{c} = (-3, 6, 1).$$

Então:

- $\overline{a} + (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots) = 2\overline{b}$,
- $\overline{a}.\overline{b} = \ldots\ldots\ldots$ e $\|\overline{b}\|^2 = \ldots\ldots$
- os vetores $\overline{a}$ e $\overline{c}$ são linearmente ....

(j) *(6)* Considere, em $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -a & a & a \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ em que $\det \mathbf{A} = 3$ e $a \in \mathbb{R}$.

Então

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -a & a & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots \quad \text{e} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7a & 7a & 7a \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(k) *(6)* Relativamente ao sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{3\times3}}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M_{3\times1}}(\mathbb{R})$, sabe-se que:

- $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{2}$ e
- $\mathbf{B}$ é a matriz-coluna igual a zero em todas as entradas.

Logo $\mathbf{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \ldots\ldots$ e o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é ....e ....

Parte II

Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.

1. Considere a seguinte função f, definida em $\mathbb{R}$, por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+2}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

   (a) Pronuncie-se quanto à continuidade de f em $x = 0$.

   (b) Calcule $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{\sin(\pi x)}$.

   (c) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(-2, 0)$.

   (d) Resolva a equação $f(x) = 0$ em $\mathbb{R}^+$.

2. Considere a região Ω do plano definida por:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x - x^2\}$$

   (a) Represente a região Ω num referencial cartesiano xOy.

   (b) Usando integrais definidos, calcule a área de Ω. Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

3. Considere, em $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B^{-1}}$ definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $\det(\mathbf{A})$ e averigue se os vetores dados pelas linhas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.

   (b) Calcule $\mathbf{BA}$.

4. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ e parametrizados por $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y & = b \\ 3x + 2y + z & = 0 \\ x + ay + z & = 2 \end{cases} .$$

(a) Classifique o sistema em função dos parâmetros a e b.

(b) Determine o conjunto solução do sistema quando $a = 0$ e $b = 3$.

Cotações:

I	II.1(a)	II.1(b)	II.1(c)	II.1(d)	II.2(a)	II.2(b)	II.3(a)	II.3(b)	II.4(a)	II.4(b)
80	10	10	10	10	10	15	10	15	15	15