Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia e Gestão

Matemática I – Semestre 2 - 2024/2025

Época de Recurso – 03 de Junho 2025

Duração: $(120 + \varepsilon)$ minutos, $|\varepsilon| \leq 30$

Versão A

Nome: ....

ID Estudante #: ....

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são independentes umas das outras.
- Não necessita de justificar as suas respostas.

(a) *(10)* Relativamente ao conjunto

$$A = [0, 2[\cup \{5\}$$

pode dizer-se que:

1. $\sup A =$ ....
2. $A^c=$ .... (complementar de A)
3. $\partial A = fr(A)=$ .... (fronteira de A)
4. $\mathrm{int}(A)=$ .... (interior de A)
5. O conjunto A **não** é compacto porque não é .... (uma vez que $\mathrm{ad}(A) \neq A$).

(b) *(9)* Seja $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que a, $a+6$ e $a+18$ são três termos consecutivos de uma progressão **geométrica** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Então:

1. a razão de $(v_n)_n$ é .... > 1.

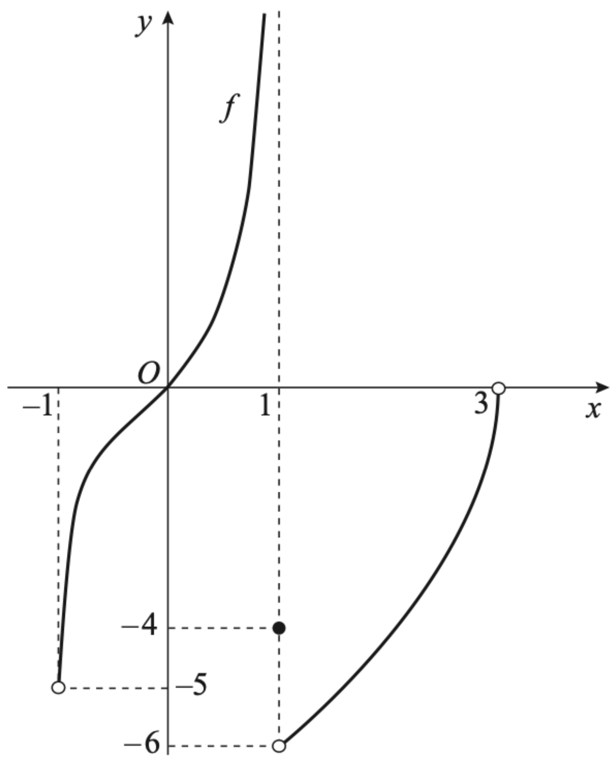
2. a sucessão $(v_n)_n$ é monótona ....

3. a série $\sum_{n=3}^{+\infty} v_n$ é ....

(c) *(6)* Na figura abaixo está representada, no referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-1,3[$. Sabe-se que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad f(1) = -4$$

e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de termos em $]1,3[$ tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$.



Então

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = ... \quad \text{e} \quad \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = ...$$

(d) *(8)* Considere a função $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln\left(\frac{5x-5}{3}\right).$$

Então:

1. $f(2) =$ .... e $f($...........$) = 0$

2. $f^{-1}(x) =$ ....

3. o contradomínio de f^{-1} é ....

(e) *(5)* Em $\mathbb{R}^+$, a equação $(x+1)\ln x = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo]....., ...[, como consequência do Teorema do Valor Intermédio.

(f) *(12)* Relativamente a uma função **ímpar** e diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabe-se que:

$$f'(x) = x^2 - 4$$

Logo, conclui-se que:

- $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} =$ ....

- f atinge um .... local em $x = -2$;

- A expressão analítica de f é $f(x) =$ ....

- A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é

  $y =$ ....

(g) *(10)* Considere a função F, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\ \mathrm{dt}.$$

Então:

- $F(1)=$ ...... e $F'(x) =$ ....

- O polinómio de Taylor de F, de grau 2 em torno de $x = 1$ é dado por:

  ....

(h) *(12)* No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ definidos por:

$$\overline{a} = (1, -2, 0), \quad \overline{b} = (4, 0, 3) \quad \overline{c} = (-3, 6, 1).$$

Então:

- $\overline{a} + (......, ..., ...) = \overline{b}$,
- $\overline{a}.\overline{c} =$ .... e $\|3\overline{b}\| =$ ....
- os vetores $\overline{a}$ e $2\overline{c}$ são linearmente ....

(i) *(12)* Sejam $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Considere, em $M_{3\times3}(\mathbb{R})$, a matriz $\mathbf{A}$ tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b & b & b \\ -a & a & a \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

onde $\det \mathbf{A} = 3$. Então pode-se concluir:

- $\det \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -a & a & a \\ b & b & b \end{bmatrix} =$ .... e $\det \begin{bmatrix} b & b & b \\ -7a & 7a & 7a \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$ ....
- $\det \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & a \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$ ....
- $\det(2\mathbf{A^{-1}}) =$ .....

(j) *(6)* Relativamente ao sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, em que $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{4\times4}}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M_{4\times1}}(\mathbb{R})$, sabe-se que:

- $\mathbf{r}(\mathbf{A^T}) = \mathbf{3}$ e
- $\mathbf{B}$ é a matriz-coluna igual a zero em todas as entradas.

Logo $\mathbf{r}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) =$ .... e o sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ é ....e ....

Parte II

Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.

---

1. Considere a seguinte função f, definida em $]-\infty,\pi]$, por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0\\[2ex] \dfrac{1}{2-\sin(2x)} & \text{se } 0\leq x\leq\pi\end{cases}.$$

   (a) Determine, se existirem, os **zeros** de f.

   (b) Averigue se a função f é **contínua** no ponto 0.

   (c) Estude a função f quanto à **monotonia** no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

2. Considere a região Ω do plano definida por:

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |1-x|\leq y\leq -x^2+2x+1\}.$$

   (a) Represente a região Ω num referencial cartesiano xOy.

   (b) Usando integrais definidos, calcule a **área** de Ω. Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

3. Calcule $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{dx}$.

   Sugestão: Use o **método de substituição** onde $t(x)=\sqrt{e^x-1}$, $x\geq 0$.

4. Considere, em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ definidas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\mathbf{r}(\mathbf{A})$ e averigue se os vetores dados pelas linhas da matriz $\mathbf{A}$ são linearmente independentes.

(b) Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I_3}$ é **invertível**, onde $\mathbf{I}_3$ representa a matriz Identidade em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis $x, y, z \in \mathbb{R}$ e parametrizado por $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + a^2y + 4z & = 5 \\ y + 4z & = b \\ (1+a^2)y + (4-a)z & = 8 \end{cases}.$$

(a) **Classifique** o sistema em função dos parâmetros a e b.

(b) Determine o conjunto solução do sistema quando $a = b = 0$.

Cotações:

I	II.1(a)	II.1(b)	II.1(c)	II.2(a)	II.2(b)	II.3	II.4(a)	II.4(b)	II.5(a)	II.5(b)
90	10	10	10	10	10	20	10	10	10	10