

Parte I

a) $\sup A = 5$

$$A^c =]-\infty, 0[\cup [2, 5[\cup]5, +\infty[$$

$$\partial A = \{0, 2, 5\}$$

$$\inf A =]0, 2[$$

A não é fechado.

b) $\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \Leftrightarrow \cancel{a^2} + 18a = \cancel{a^2} + 12a + 36$
 $\Leftrightarrow 6a = 36 \Rightarrow a = 6$

$$r = \frac{12}{6} = 2$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 12 & 24 \\ \hline & \times 2 & \times 2 \end{array}$$

• razão é 2.

• monotona crescente

• $\sum_{n=3}^{+\infty} v_n$ é divergente.

(2)

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -6.$$

$$d) f(2) = \ln\left(\frac{5 \cdot 2 - 5}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\bullet f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x - 5}{3} = 1 \Leftrightarrow 5x - 5 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$$

$$\bullet f\left(\frac{8}{5}\right) = 0$$

$$\bullet f^{-1}(x) = \frac{3e^x + 5}{5}$$

$$\bullet D_{f^{-1}} =]1, +\infty[$$

$$y = \ln\left(\frac{5x - 5}{3}\right)$$

$$e^y = \frac{5x - 5}{3}$$

$$3e^y = 5x - 5$$

$$\frac{3e^y + 5}{5} = x$$

$$e) f(x) = (x+1) \ln x \quad \text{contínua em } \mathbb{R}^+$$

$$f(1) = 0 < 3$$

$$f(e) = (e+1) \cdot \ln e = e+1 \simeq 3,7173$$

$$f(x) = 3 \text{ tem solução no intervalo }]1, e[$$

(3)

$$f) \quad f'(x) = x^2 - 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 3^2 - 4 = 5$$

• f atinge um máximo local em $x = -2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
f'		0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\bullet f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x \quad (\text{ímpar})$$

$$\bullet f(0) = 0 \quad (\text{ímpar}) \quad f'(0) = -4$$

Equação reduzida: $\boxed{y = -4x}$

$$1) \bullet F(1) = \int_1^1 e^{-t^2} dt = 0$$

$$\bullet F'(x) = e^{-x^2}$$

• Polinômio de Taylor

$$P(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2!}(x-1)^2$$

(4)

$$= 0 + e^{-1}(x-1) - e^{-1}(x-1)^2$$

$$F'(1) = e^{-1}$$

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$F''(1) = -2e^{-1}$$

h) $\vec{a} = (1, -2, 0)$ $\vec{b} = (4, 0, 3)$

$$\bullet \vec{a} + (3, 2, 3) = \vec{b}$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{c} = -3 - 12 + 0 = -15$$

$$\bullet \|\vec{3b}\| = 3\|\vec{b}\| = 3 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\bullet \vec{a}, 2\vec{c} \text{ s\~ao linearmente independentes}$$

i) $\det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix} = -3$ (troquei duas linhas)

$$\det \begin{pmatrix} b & b & b \\ -7a & 7a & 7a \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 7 \times 3 = 21$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & a \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = -5 \cdot \det \begin{pmatrix} b & b & b \\ -a & a & a \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= -5 \times 3 = -15.$$

$$\det(2A^{-1}) = 2^3 \cdot \det A^{-1} = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$i) \quad \text{r}(A|B) = 3$$

$AX = B$ é possível e indeterminado.

Parte II

$$(a) \quad \boxed{x < 0} \quad \frac{e^{2x} - 1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin \mathbb{R}^-$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sin(2x)} \quad \text{não tem zeros.}$$

$\therefore f$ não tem zeros.

16) *

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{4} = \frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, tem-se

que f é contínua em $x=0$.

$$1c) \quad x \in]0, \pi[. \\ f'(x) = \frac{1' \cdot (2 - \sin 2x) - 1 \cdot (2 - \sin(2x))'}{(2 - \sin(2x))^2}$$

$$= \frac{-1 \cdot (-2 \cos 2x)}{(2 - \sin(2x))^2} = \frac{2 \cos 2x}{(2 - \sin(2x))^2}$$

$$2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

(7)

$$k=0 \quad x = \frac{\pi}{4} \in]0, \pi]$$

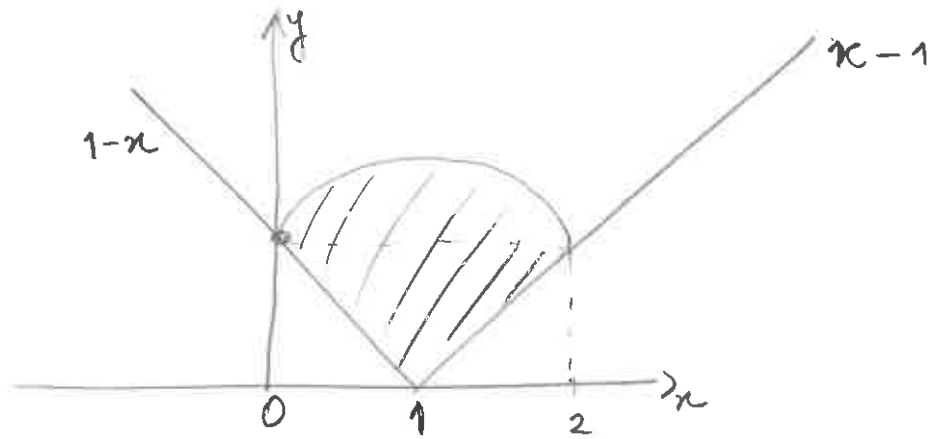
$$k=1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \in]0, \pi]$$

x	0	$\pi/4$		$\frac{3}{4}\pi$	π
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Conclusões:

- f é monótona crescente em $]0, \frac{\pi}{4}[$ e em $]\frac{3}{4}\pi, \pi[$
- f é monótona decrescente em $]\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi[$.
- f atinge um máximo relativo em $x = \pi/4$ e em $x = \pi$
- f atinge um mínimo relativo em $x = \frac{3}{4}\pi$

2a)



$$-x^2 + 2x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow -x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$\begin{aligned} b) \quad A &= \int_0^1 -x^2 + 2x + 1 - (1 - x) dx + \int_1^2 -x^2 + 2x + 1 - (x - 1) dx \\ &= \int_0^1 -x^2 + 3x dx + \int_1^2 -x^2 + x + 2 dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \end{aligned}$$

(9)

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) + \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= -\frac{2}{6} + \frac{9}{6} + \left(-\frac{16}{6} + \frac{12}{6} + \frac{24}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} - \frac{12}{6} \right)$$

$$= \frac{7}{6} + \left(\frac{7}{6} \right) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

3. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$

$$t(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$t'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - 1)^{-1/2} \cdot (e^x)'$$

$$= \frac{1/2 e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + 1}{t} \, dx$$

$$t(x) = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2(x) = e^x - 1$$

$$\Rightarrow t^2(x) + 1 = e^x$$

$$\int \sqrt{e^x - 1} \, dx = \int \frac{zt^2}{t^2 + 1} \, dt =$$

$$dt = \frac{1}{2} \frac{t^2 + 1}{t} \, dx$$

$$dx = \frac{2t}{t^2 + 1} \, dt$$

$$= \int \frac{2t^2 + 2}{t^2 + 1} - \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

$$= \int 2 - \frac{2}{t^2 + 1} dt =$$

$$= 2t - 2 \cdot \arctan t + C$$

$$= 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left(2\sqrt{e^{\ln 2} - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^{\ln 2} - 1} \right) - \left(2 \cdot 0 - 2 \arctan 0 \right)$$

$$= 2 - 2 \arctan 1 = 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$4a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2 - 5) - 3 \cdot (1 - 2) = -3 + 3 = 0$$

$$\det A = 0 \Rightarrow \text{rank}(A) < 3 \Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

↑
 existem duas colunas
 linearmente independentes
 mas não existem três
 linhas/linhas lin. indep.

$$4b) \det(B - \lambda \text{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - 4(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4)$$

$$\det(B - \lambda \text{Id}_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -2$$

Se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, então $B - \lambda \text{Id}_3$ é invertível

5a)

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & (1+a^2) & 4-a & 8 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & b \\ 0 & 0 & -4a^2-a & -b(1+a^2)+8 \end{array} \right)$$

A B

$$-4a^2-a = -a(4a+1)$$

(i) Se $a=0$ ou $4a+1=0$, então $\text{rank}(A) = 2$
 $\Leftrightarrow a = -1/4$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ b=8 \longrightarrow \text{rank}(A|B) = 2 \\ b \neq 8 \longrightarrow \text{rank}(A|B) = 3 \end{array}$$

(ii) Se $a = -1/4$ e $b = \frac{-128}{17}$, então $\text{rank}(A|B) = 2$

$$-b\left(1 + \frac{1}{16}\right) + 8 = 0 \Rightarrow b = \frac{+8}{\frac{17}{16}}$$

$$\Rightarrow b = + \frac{8 \cdot 16}{17}$$

$$\Rightarrow b = + \frac{128}{17}$$

Se $a = -1/4$ e $b \neq \frac{+128}{17}$, então $\lambda(A|B) = 3$

Se $a \neq 0$ e $a \neq -1/4$, então $r(A) = \lambda(A|B) = 3$

Conclusão

(i) $a = 0$ e $b = 8 \rightarrow$ Sistema possível e indeterminado

(ii) $a = 0$ e $b \neq 8 \rightarrow$ Sistema impossível

(iii) $a = -1/4$ e $b = \frac{+128}{17} \rightarrow$ Sistema possível e indeterminado

(iv) $a = -1/4$ e $b \neq \frac{+128}{17} \rightarrow$ Sistema impossível

(v) $a \neq 0$ e $a \neq -1/4 \rightarrow$ Sistema possível e determinado

5 b) $a = 0, b = 0 \Rightarrow$ Sistema impossível

C.S. $\emptyset$.

FIM