Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 3 e 4 (Semana 2)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1. Introdução à Estatística

1.1. Estatística Descritiva

2. Probabilidades

2.1. Introdução

2.2. Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos

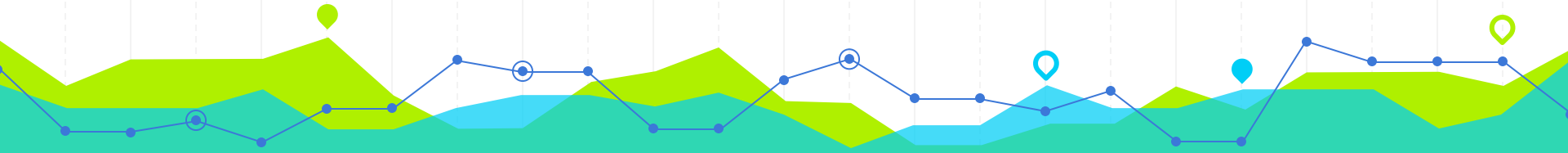
2.3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov

2.4. Interpretações do conceito de probabilidade

2.5. Probabilidade condicionada.

2.6. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

2.7. Acontecimentos independentes

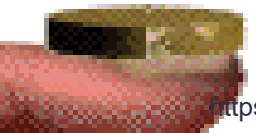


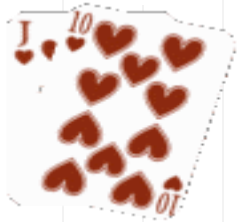
Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

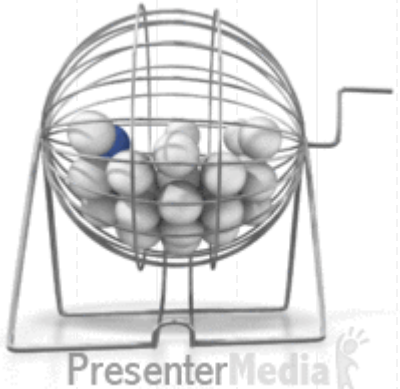
1

Experiência Aleatória

É toda a experiência que, mesmo repetida várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentro dos resultados possíveis.







Espaço de Resultados / Espaço Amostral / Universo

- É o conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.
- Representa-se por S ou Ω.

Espaço de Resultados

Qual é o espaço de resultados do lançamento de uma moeda?

$\Omega = \{Cara, Coroa\}$

Qual é o espaço de resultados do lançamento de um dado?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Acontecimento ou Evento

É todo subconjunto de um espaço de resultados Ω de uma experiência aleatória.

Acontecimento ou Evento

No lançamento de um dado, deseja-se que “saiam” valores menores que 4. Qual o evento desta experiência?

$$A = \{1, 2, 3\}$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Tipos de Acontecimentos

- Certo;
- Impossível;
- Muito provável;
- Pouco provável;
- Elementar;
- Composto.

Tipos de Acontecimentos

Obter um número menor que 7 no lançamento de um dado representa que tipo de evento?

E um resultado igual a zero?

E um resultado maior que 5?

Resumindo....
Experiência Aleatória, Espaço de Resultados e Acontecimentos

Experiência Aleatória ou casual caracteriza-se pela impossibilidade de prever o resultado que se obterá, apesar de todos os seus possíveis resultados serem conhecidos à partida.

Universo, espaço de resultados ou espaço amostral de uma experiência aleatória é o conjunto de todos os seus resultados possíveis, denotado por Ω.

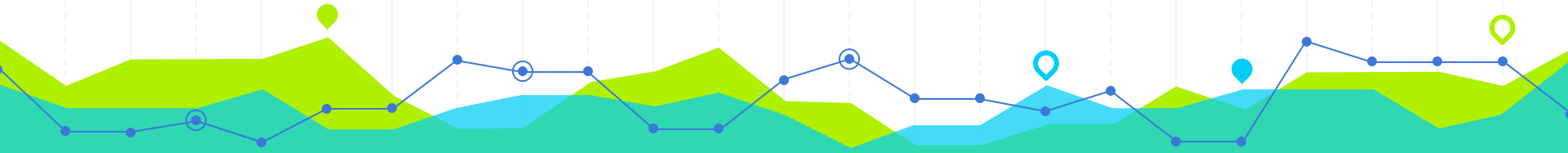
Acontecimento de uma experiência aleatória E com universo Ω é um subconjunto de Ω.

Exemplo:

- Experiência E: Lançamento de um dado
- Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
- Acontecimentos elementares *A* = {1}, *B* = {2}, …
- Acontecimentos compostos *A* = {1, 2}, *B* = {2, 4, 6}, …
- Acontecimento certo *A* = Ω

Espaço de acontecimentos = { {}, Ω, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}. {4,6}, {5,6}, {1,2,3}, .. }

Acontecimento impossível = { }



Conceitos Básicos de Probabilidade

2

Noção de Probabilidade, Probabilidade da União,
Probabilidade da Interseção e Probabilidade da Diferença

É possível saber a chance/possibilidade de algo acontecer?

Imagem: Webmaster-chx / Creative Commons paternité – partage à l'identique 3.0 (non transposée)

Noção de Probabilidade

Sim, é possível medir a chance/possibilidade de algo acontecer.
Essa medida é chamada de PROBABILIDADE!

PROBABILIDADE (proporção ou percentagem) mede a possibilidade de ocorrência de um evento ou acontecimento.

Definições de Probabilidade

Definição frequencista de probabilidade

- Probabilidade de um acontecimento *A* é o valor para que tende a frequência relativa desse acontecimento quando o número de repetições da experiência aleatória é elevado, e representa-se por

$$P(A) \sim \text{frequência(A)}$$

Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace)

- Probabilidade de um acontecimento *A* é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Então, a probabilidade de *A* é dada por

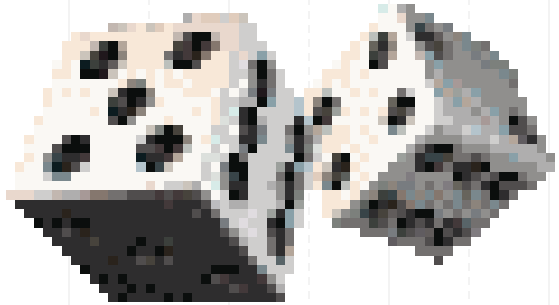
$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}} = \frac{m}{n}$$

Nota: Aplica-se a definição clássica de probabilidade se os acontecimentos possíveis são equiprováveis, ou seja, ocorrem com a mesma probabilidade. Utiliza-se a definição frequencista de probabilidade caso os acontecimentos sejam equiprováveis ou não.

$P(A)$ é um número entre 0 e 1 ou 0% e 100%.

Tipos de Probabilidades

- Probabilidade simples;
- Probabilidade complementar;
- Probabilidade da união ou reunião;
- Probabilidade da interseção ou conjunta;
- Probabilidade da diferença;
- Probabilidade condicional.



Baseada em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Simples: Exemplo

Considere um exame com 15 questões de escolha múltipla com 4 alternativas, sendo apenas uma delas a correta. É fácil acertar em 15 questões, ao acaso, no exame?

$$P(15) = \frac{1}{4^{15}} = 9{,}31323\text{E}{-10}$$

Probabilidade Complementar

- Probabilidade de um determinado evento A **não** ocorrer.

- Denota-se por P^c , $P(Ac)$ ou $P(\bar{A})$

- $A^c = \Omega - A$.

Probabilidade da diferença

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade Complementar: Exemplo

No lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de não sair a soma 4?

$$\begin{aligned} P(\text{não sair a soma } 4) &= 1 - P(\text{sair a soma } 4) \\ &= 1 - 3/(6\times 6) = 11/12 \\ &= 0{,}92 = 92\% \end{aligned}$$

Axiomática de Probabilidade

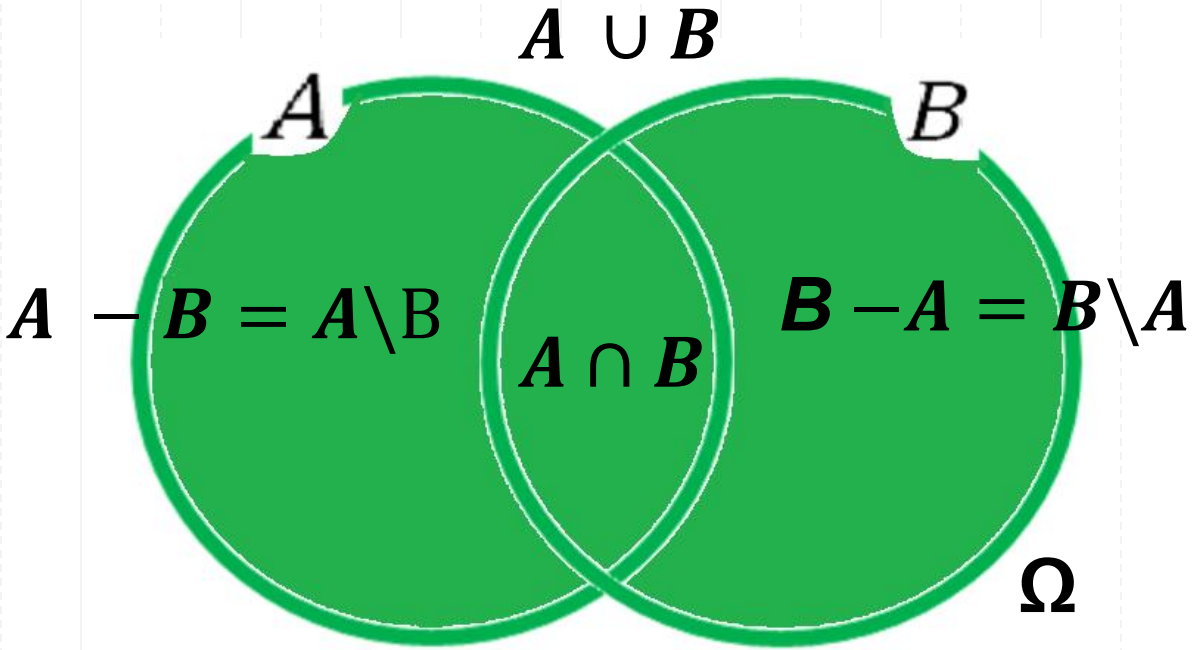
- $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in$ Espaço dos acontecimentos
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\{\}) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ e $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- Se $A \subseteq B$ (Se a realização do acontecimento B implica a realização do acontecimento A), então $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade da diferença: P(A-B) = P(A/B) e P(B-A) = P(B/A)

- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Nota: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

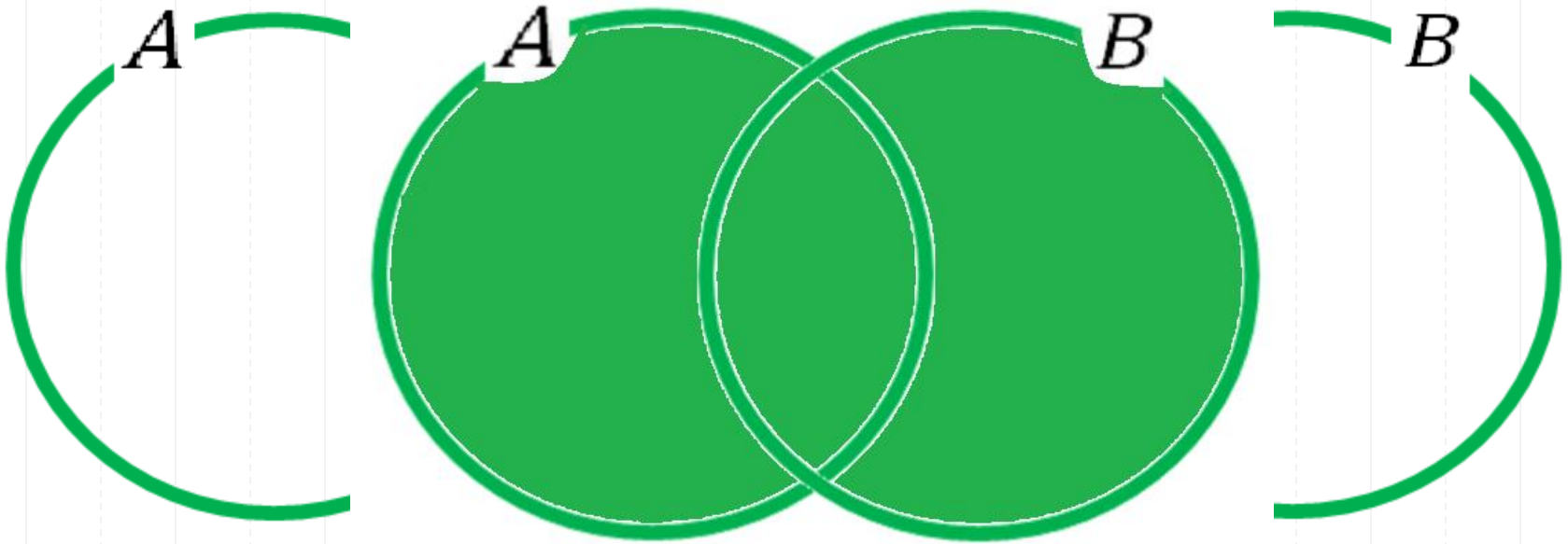
Diagrama de Venn



Baseado em https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

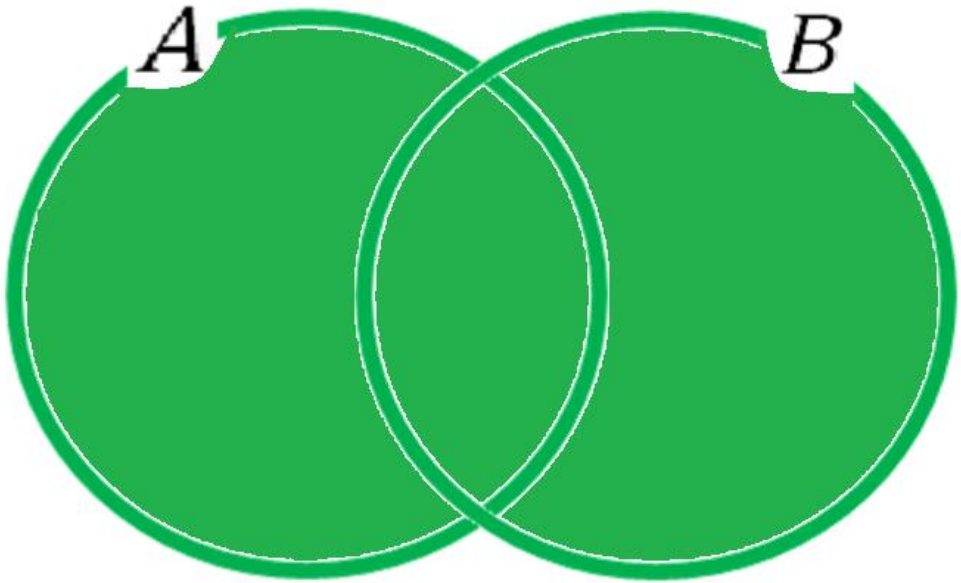
$$A \cup B$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União/Reunião

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da União: Exemplo

Numa comunidade de 1000 habitantes, 400 são sócios do clube *A*, 300 do clube *B* e 200 de ambos. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de *A* ou de *B*?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= (400+300-200)/1000 = 0{,}5 = 50\%$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Axiomática de Probabilidade

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\forall A, B \in$ Espaço dos acontecimentos

  (Probabilidade da reunião de acontecimentos)

  - Sejam A e B dois acontecimentos mutuamente exclusivos ou incompatíveis, definidos em Ω, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então tem-se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

    caso contrário $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    Escrito de outra forma: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

    $A, B \in$ Espaço dos acontecimentos

- Regra de Inclusão-exclusão:

  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Os **acontecimentos disjuntos**, mutuamente exclusivos ou incompatíveis não têm elementos comuns.

Nota: A abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

Probabilidade da Interseção: Independência

Quando os resultados do evento A não interferirem e nem influenciaram os resultados do evento B.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/disciplinas/matematica-iii/probabilidade/slides-4-probabilidade

Probabilidade da Interseção: Independência

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ *dizem-se independentes sse*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. $\bar{A}, B$ são independentes,
2. $A, \bar{B}$ são independentes,
3. $\bar{A}, \bar{B}$ são independentes.

Acontecimentos independentes

Definição 2.9: Diz-se que dois acontecimentos A e B de um mesmo espaço de resultados Ω são *independentes* se

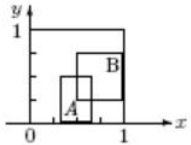
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Todo o acontecimento A é independente de $\emptyset$ e Ω.
- Se A e B são acontecimentos independentes, $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$.
- Se A e B são acontecimentos independentes, também o são $\bar{A}$ e B, A e $\bar{B}$ e $\bar{A}$ e $\bar{B}$.
- Acontecimentos A e B são condicionalmente independentes ao acontecimento C, $P(C) > 0$, se $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Os acontecimentos A, B e C são completamente independentes, se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

  Nota: Independência 2 a 2 $\nRightarrow$ independência completa dos 3.
- Generalização: Os acontecimentos $A_1, \ldots, A_n$ dizem-se independentes se para todo o $k = 2, \ldots, n$ e todo o subconjunto $\{A_{i_j}, j = 1, \ldots, k\}$ de k desses acontecimentos, $P(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$.

  Nota: O número de relações é dado por $2^n - (n+1)$.

Exemplo 2.9: Considere o espaço de resultados Ω como o quadrado de vértices (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1). Suponha que a probabilidade de uma região (acontecimento) contida em Ω seja a área desta região. Os acontecimentos $A = \{(x, y) : 1/3 \leq x \leq 2/3, 0 \leq y \leq 1/2\}$ e $B = \{(x, y) : 1/2 \leq x \leq 1, 1/4 \leq y \leq 3/4\}$ são independentes?

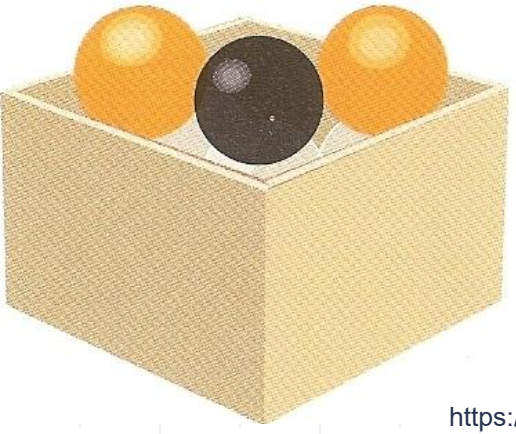


$P(A) = 1/6, \ P(B) = 1/4$
$P(A \cap B) = 1/24 = P(A) \times P(B)$
$\therefore$ A e B são independentes.

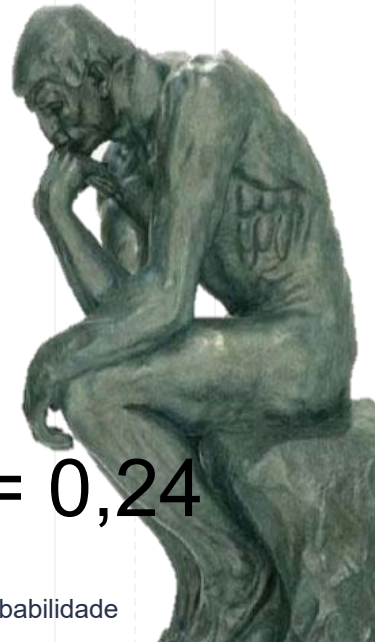
Fonte: PE_slides-print Notas Apoio Cap 1-9.pdf: Material do IST

Probabilidade da Interseção: Exemplo 1

Numa caixa há 4 bolas pretas e 6 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de tirarmos uma bola preta e uma vermelha, com reposição?



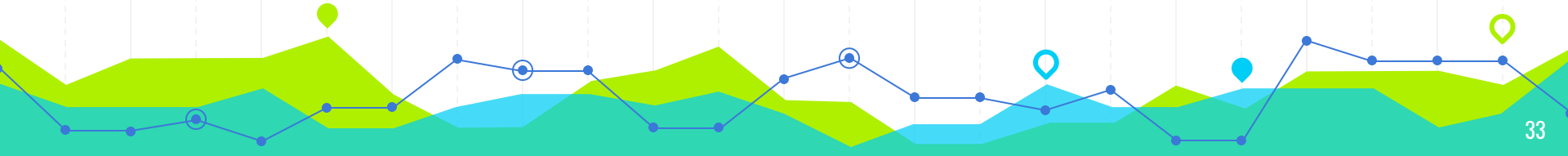
$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}24$$



Probabilidade de Interseção: Exemplo 2

A probabilidade do Paulo Adriano “tirar” dez na prova de Matemática é 1/3 e a probabilidade do Paulo Lucas “tirar” dez na mesma prova é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos terem nota dez nesta prova?

$$P(\textit{ambos os alunos têm nota } 10) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Obrigada!

Questões?