

Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1

14/10/2025

Ano letivo 2025/2026



1. (2,0 valores) Considere o seguinte problema de programação linear inteira mista.

$$\begin{aligned}(P) \quad & \max 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \\ & x_3 \geq 0\end{aligned}$$

Construa uma relaxação de (P), que não seja a relaxação linear, e justifique que construiu uma relaxação.

2. Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

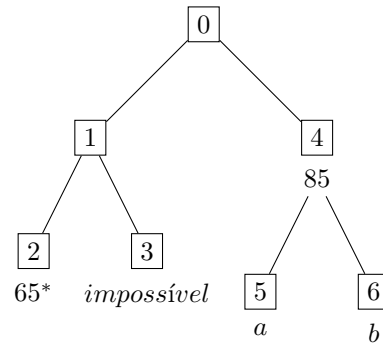
$$\begin{aligned}(Q) \quad & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (*) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

- (a) (1,5 valores) Construa a relaxação Lagrangeana de (Q) relaxando a restrição assinalada com (*) e apresente o problema dual Lagrangeano.
- (b) (2,0 valores) Calcule $z(2)$ e relacione com o valor ótimo de (Q).
- (c) (3,0 valores) Deduza a expressão da função dual Lagrangeana através da representação gráfica e calcule o w^{DL} . O que pode concluir sobre o valor ótimo de (Q)? **Sugestão:** Desenhe o gráfico com contra-domínio $[0,30]$.
3. Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$\begin{aligned}(R) \quad & \min 7x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeito a: } & 2x_1 + 5x_2 \geq 14 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 2x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}\end{aligned}$$

- (a) (2,5 valores) Aplique o algoritmo de *branch-and-bound* ramificando na variável com o índice mais alto. Resolva no máximo três subproblemas, incluindo a relaxação linear. O que pode concluir sobre o valor ótimo de (R)?
- (b) (1,0 valores) Caso não houvesse limite ao número de subproblemas a resolver na alínea anterior, quais seriam os próximos passos do algoritmo de *branch-and-bound*?

4. No processo de resolução de um problema de programação inteira de maximização pelo algoritmo de *branch-and-bound* obteve-se a seguinte árvore de enumeração. O número junto de cada nodo é o valor de um majorante do subproblema correspondente, sendo o valor ótimo do subproblema quando assinalado com (*).



Indique, justificando:

- (0,5 valores) O que pode aferir sobre os valores de a e de b ?
 - Quais os valores de a e de b que tornam as seguintes afirmações verdadeiras:
 - (1,0 valores) A solução do subproblema 2 é a solução ótima.
 - (1,0 valores) Só é necessário ramificar o subproblema 6.
5. (2,5 valores) Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$(S) \quad z = \max_{(x_1, x_2) \in X} \{4x_1 - x_2\}$$

com $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 7x_1 - 2x_2 \leq 14, 2x_1 - x_2 \geq 3 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. Sabendo que a solução ótima da relaxação linear de (S) é $x^{RL} = (3/2, 0)$, encontre um corte de Gomory para x^{RL} e mostre que se trata de um corte.

- (1,5 valores) Considere o seguinte conjunto de pontos $Y = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + 4x_2 \geq 8, x_1 + x_2 \leq 12, \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$. Proponha, justificando, duas desigualdades válidas para Y , sendo que uma deve dominar a outra.
- (1,5 valores) Sejam x_i , com $i \in \{1, \dots, 5\}$, variáveis binárias. Tendo em conta o seguinte sistema de equações o que pode concluir sobre o valor das variáveis x ?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_4 + x_5 \leq 1 \\ x_1 + x_5 \leq 0 \end{cases}$$