Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1
Tópicos de uma resolução incompleta

14/10/2025 Ano letivo 2025/2026

1. Uma relaxação de (P) é, por exemplo:

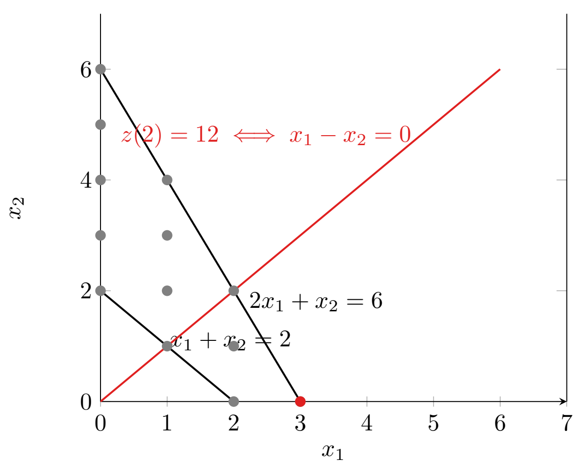
$$
\begin{aligned}
(P') \qquad & \max \ 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Seja X_P a região admissível de (P) e $X_{P'}$ a região admissível de (P'). Temos que $X_P = X_{P'}$, logo $X_{P'} \subseteq X_P$. Como a região admissível de (P) só contém pontos positivos $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$, podemos concluir que $\forall (x_1, x_2, x_3) \in X_P$, $10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$. Logo (P') é uma relaxação de (P).

2. (a)

$$
\begin{aligned}
z(u) = & \max \ 6u + (3-u)x_1 + (2-2u)x_2 \\
\text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \\
w^{DL} = & \min \{z(u) : u \geq 0\}
\end{aligned}
$$

(b)



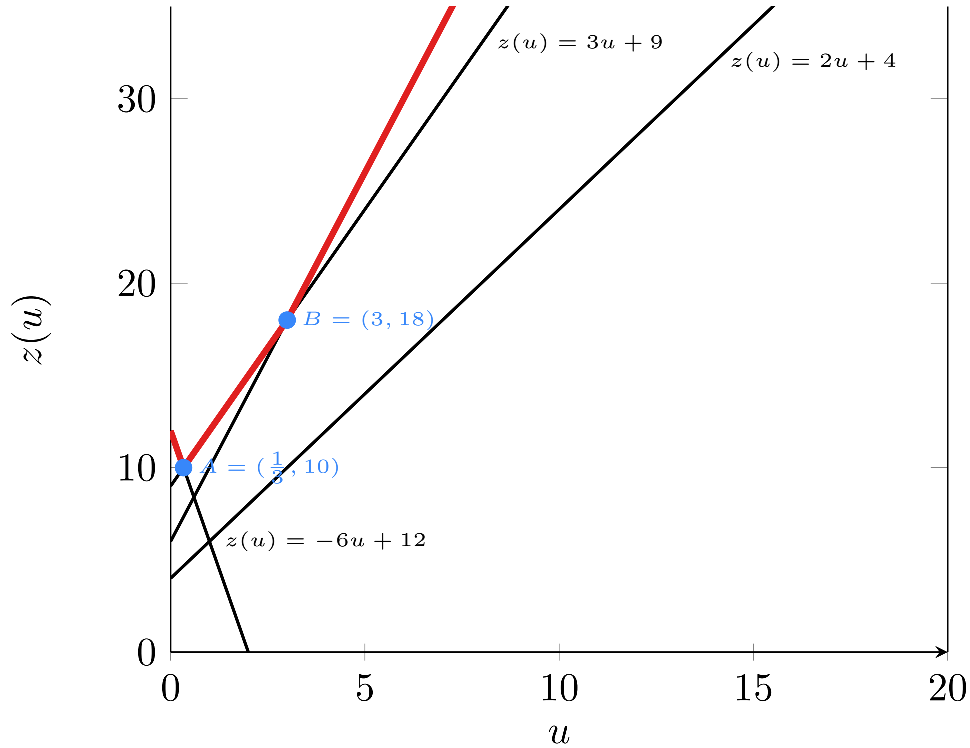
A RA são os pontos assinalados.

$z(2) = \max 6 \times 2 + (3-2)x_1 + (2 - 2 \times 2)x_2 = \max 12 + x_1 - x_2$

A SO de $z(2)$ é $(3, 0)$ e $z(2) = 12 + 3 - 0 = 15$.
Logo, podemos concluir que $z \leq z(2) = 15$.

(c) Observando o gráfico, os pontos extremos são: (2, 0), (3,0), (0,2) e (0,6).

- $(2, 0) \to z(u) = 6u + (3-u) \times 2 + (2-2u) \times 0 = 4u + 6$
- $(3, 0) \to z(u) = 6u + (3-u) \times 3 + (2-2u) \times 0 = 3u + 9$
- $(0, 2) \to z(u) = 6u + (3-u) \times 0 + (2-2u) \times 2 = 2u + 4$
- $(0, 6) \to z(u) = 6u + (3-u) \times 0 + (2-2u) \times 6 = -6u + 12$

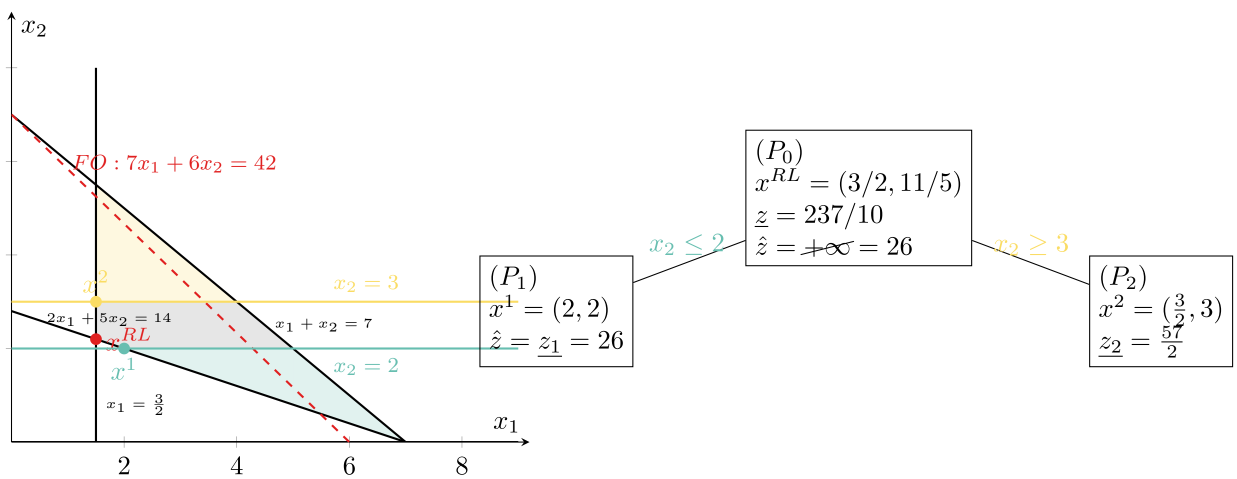


Observando o gráfico temos que:

$$z(u) = \begin{cases} -6u + 12, & 0 \leq u \leq \frac{1}{3} \\ 3u + 9, & \frac{1}{3} \leq u \leq 3 \\ 4u + 6, & u \geq 3 \end{cases}$$

O valor de u que minimiza a função $z(u)$ +e $u^* = \frac{1}{3}$ e $w^{DL} = z(\frac{1}{3}) = 10$. Logo, $z \leq w^{DL} = 10$.

3. (a)



Podemos concluir que $z = 26$.

(b) $P1$ não é necessário ramificar pois já foi encontrada uma SA. $P2$ não é necessário ramifica pois $\underline{z_2} = \frac{57}{2} = 28,5$ e já é conhecida uma SA com valor 26, o que é melhor.

4. (a) $a, b \leq 85$

(b) i. $a, b \leq 65$

ii. $b \leq 65$ e $65 \geq a \leq 85$

5. Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$$

A SO da relaxação linear na forma aumentada é: $x^{RL} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{7}{2}, 0) \implies x_1$ e x_3 são VBs. O sistema em função de x_1 e x_3 fica:

$$\begin{cases} 7(3/2 + x_2/2 - x_4/2) + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 = 3/2 + x_2/2 + x_4/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 11/2x_2 + x_3 + 7/2x_4 = 7/2 \\ x_1 - x_2/2 - x_4/2 = 3/2 \end{cases}$$

Como ambas as restrições têm TI fracionários, vamos escolher a associada a x_1 para gerar o corte de Gomory.

$$(-\frac{1}{2} + 1)x_2 + (-\frac{1}{2} + 1)x_4 \geq (\frac{3}{2} - 1) \iff \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2} \iff x_2 + x_4 \geq 1$$

A restrição $x_2 + x_4 \geq 1$ corta a SO da relaxação linear pois $x_2^{RL} - x_4^{RL} = 3/2 + 0 > 1$.

6. $x_1 + x_2 \geq 1$ e $x_1 + x_2 \geq 2$. A segunda desigualdade domina a primeira pois tem o mesmo lado esquerdo e maior lado direito.

7. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_5 = 0$ e $x_4 \in \{0, 1\}$.