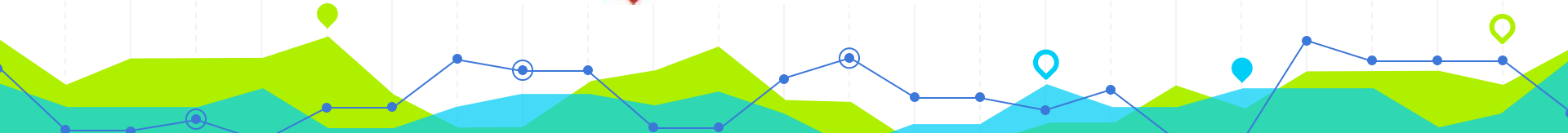




Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa



Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2025/2026

Aula Teórico-Prática N.º 7 (Semana 4)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

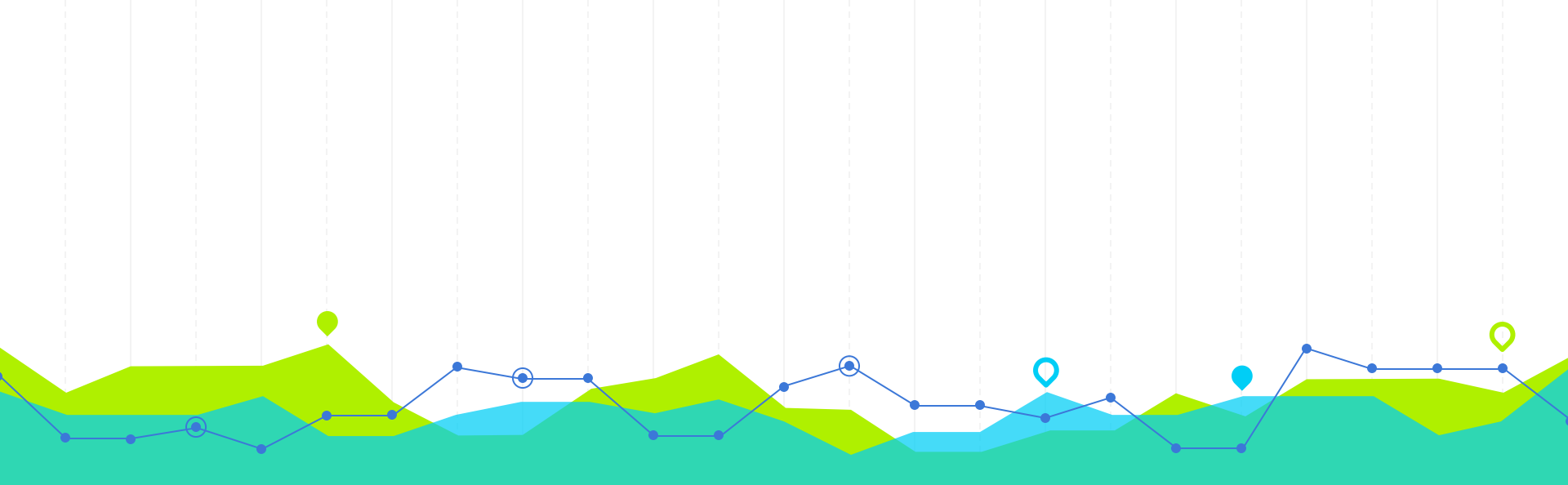
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Distribuições do Mínimo e Máximo: Exercícios

Distribuições de Amostragem

1

13. O tempo que um aluno despende por dia no *messenger* tem distribuição exponencial com média 2 horas. Seleccionaram-se 5 dias ao acaso tendo-se observado o tempo despendido no *messenger* em cada um deles.

a) Calcule a probabilidade do tempo médio despendido no *messenger*, por dia, ser superior a 4 horas?

b) Qual a probabilidade de o tempo máximo despendido por dia, não ultrapassar 6 horas?



Exercício 13 a)

X - v.a. tempo diário gasto no facebook, em horas

$$X \sim \text{Ex}(\lambda/2) = \text{Ex}(0.5), \quad \lambda = 0.5$$

Amostra: $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, $n=5$, onde $X_i \sim \text{Ex}(0.5)$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$)

$$\text{Tempo médio na amostra: } \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5} = \bar{X}$$

$$\text{Quer-se } P(\bar{X} > 4) = P\left(\sum_{i=1}^5 X_i > 20\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Como } X_i &\sim \text{Ex}(0.5) \Rightarrow \sum_{i=1}^5 X_i \sim G(5, 0.5) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5} \sim G\left(5, \frac{0.5}{5}\right) \Leftrightarrow \bar{X} \sim G(5, 0.1) \Leftrightarrow \bar{X} \sim G(5, 2.5) \\ &\Rightarrow 2\lambda \bar{X} \sim \chi^2(2 \times 5) \Leftrightarrow Q \sim \chi^2(10) \Rightarrow 2\lambda \sum_{i=1}^5 X_i \sim \chi^2(2 \times 5) \Leftrightarrow Q \sim \chi^2(10) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } P\left(\sum_{i=1}^5 X_i > 20\right) = P\left(2\lambda \sum_{i=1}^5 X_i > 2 \times 0.5 \times 20\right) = P(Q > 20) \approx 0.02925$$

Distribuições: Exponencial, Gama e Qui-Quadrado

Formulário

- **EXPONENCIAL** $X \sim \text{Ex}(\lambda)$, $(\lambda > 0)$; $X \sim \text{Ex}(\lambda) \Leftrightarrow X \sim G(1, \lambda)$

$$f(x | \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}; \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \mathfrak{I}(\lambda) = 1 / \lambda^2$$

Propriedades:

$$X_i \sim \text{Ex}(\lambda) \text{ (} i = 1, 2, \dots, k \text{) independentes} \Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim G(k, \lambda) \text{ e } \min_i X_i \sim \text{Ex}(k\lambda)$$

- **GAMA** $X \sim G(\alpha, \lambda)$, $(\lambda > 0, \alpha > 0)$

$$f(x | \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0; \quad E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}; \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \quad \mathfrak{I}(\lambda) = \alpha / \lambda^2, \lambda^2 \text{ conhecido}$$

Propriedades:

- $X_i \sim G(\alpha_i; \lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i; \lambda\right)$
- $X \sim G(\alpha, \lambda)$ então $Y = cX \sim G(\alpha, \frac{\lambda}{c})$ onde c constante positiva

- **QUI-QUADRADO** $X \sim \chi^2(n)$, $(n \text{ inteiro positivo})$.

$$X \sim \chi^2(n) \Leftrightarrow X \sim G(n/2; 1/2); \quad E(X) = n; \quad \text{Var}(X) = 2n$$

Propriedades:

- $X_i \sim \chi^2_{(n_i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^k X_i \sim \chi^2_{(n)}$ com $n = \sum_{i=1}^k n_i$
- $X \sim G(n; \lambda) \Leftrightarrow 2\lambda X \sim \chi^2(2n)$
- $X_i \sim N(0, 1)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ independentes $\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$

Exercício 13 b)

Quer-se $P[\max(x_i) \leq 6]$ ~~$P[\max(x_i) \leq 6]$~~ ~~$(x_i \text{ é contínuo})$~~

Distribuição do máximo

$$G_n(x) = P[\max(x_i) \leq x] = [F_x(x)]^n, \text{ onde } n=5. \text{ Logo,}$$

$$P[\max(x_i) \leq 6] = G_5(6) = [F_x(6)]^5$$

$$\bullet F_x(6) = P(X \leq 6) = \int_0^6 0.5 e^{-0.5x} dx = [-e^{-0.5x}]_0^6 = 1 - e^{-3}$$

Assim,

$$F_{\max}(6) = (1 - e^{-3})^5 = (0,95)^5 = 0,774$$

14. O tempo decorrido desde a participação da avaria até à reparação (tempo de reparação) de um certo tipo de máquina é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 4 horas.
- a) Em dez avarias participadas qual a probabilidade de o menor dos tempos de reparação ser superior a 2 horas? E do maior dos tempos de reparação não ultrapassar as 8 horas?
 - b) Numa amostra casual de 40 avarias qual a probabilidade da média dos tempos de reparação ser inferior a 5.1 horas?



Exercício 14 a)

X - tempo de reparação, em horas $\rightarrow X \sim \text{Ex}(1/4)$

$$(X_1, X_2, \dots, X_{10})$$

$$P(X_{(1)} > 2)$$

- $X_{(1)} = Y \sim \text{Ex}\left(10 \times \frac{1}{4}\right) = \text{Ex}(2.5)$

$$P(X_{(1)} > 2) = P(Y > 2) = \int_2^{+\infty} 2.5 e^{-2.5y} dy = \left[-e^{-2.5y} \right]_2^{+\infty} = e^{-5} \approx 0.0067$$

Outra forma de
resolver, muito
melhor:

- $G_1(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$

$$P(X_{(1)} > 2) = 1 - P(X_{(1)} \leq 2) = 1 - G_1(2) = 1 - \left\{ 1 - [1 - F_x(2)]^{10} \right\} = [1 - F_x(2)]^{10}$$

$$\rightarrow F_x(2) = P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{4}x} \right]_0^2 = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Logo, } P(X_{(1)} > 2) = \left[1 - (1 - e^{-1/2}) \right]^{10} = (e^{-1/2})^{10} = e^{-5} \approx 0.0067$$

Exercício 14 a)

$$P(X_{(10)} \leq 8) = G_{10}(8) = [F_x(8)]^{10}$$

$$\rightarrow F_x(8) = \int_0^8 \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{4}} \right]_0^8 = 1 - e^{-2}$$

Logo,

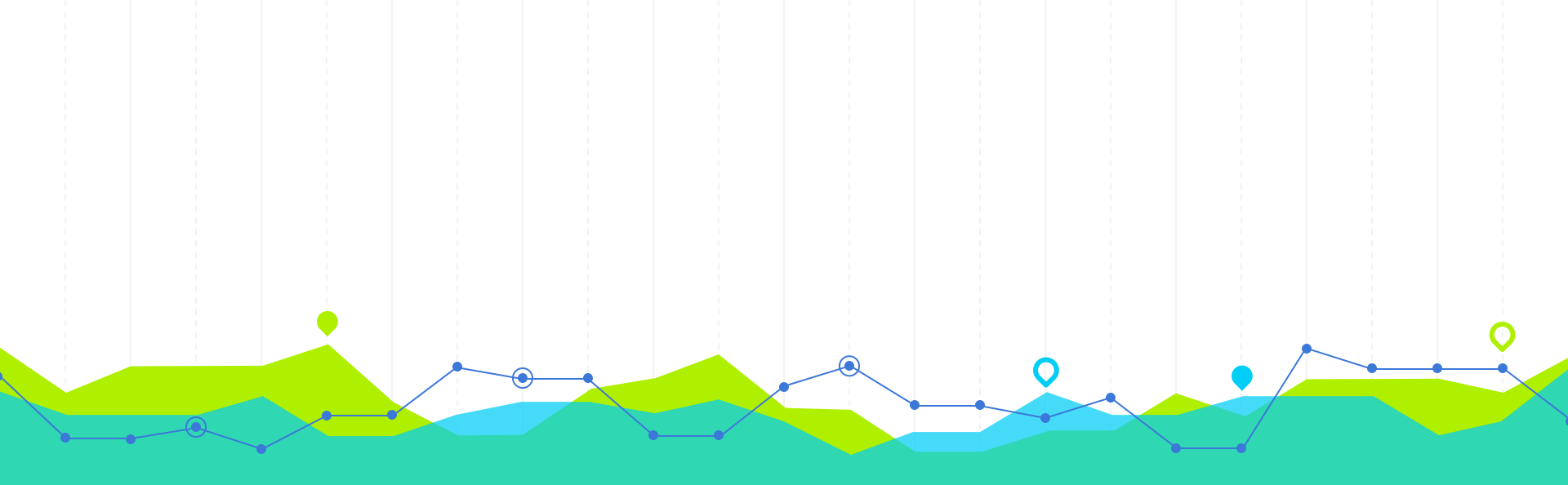
$$P(X_{(10)} \leq 8) = (1 - e^{-2})^{10} \approx 0.2336$$

Exercício 14 b)

Amostra : $(x_1, x_2, \dots, x_{40})$

$$P(\bar{X} < 5.1) = P\left(\sum_{i=1}^{40} x_i < 5.1 \times 40\right) = P\left(\sum_{i=1}^{40} x_i < 204\right) =$$

$$= P\left(\underbrace{2\lambda \sum_{i=1}^{40} x_i}_{\chi^2_{(2 \times 40)}} < 2 \times \frac{1}{4} \times 204\right) = P\left(\chi^2_{(80)} < 102\right) \approx 0.9508$$



Distribuições de Amostragem: Resumo

2

Distribuições de Amostragem

Formulário

• POPULAÇÕES NORMAIS

Média	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \sim t(\nu)$
	$T = \frac{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1'^2 + (n-1)S_2'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$	onde ν é o maior inteiro contido em r, $r = \frac{\left(\frac{s_1'^2}{m} + \frac{s_2'^2}{n}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\left(\frac{s_1'^2}{m}\right)^2 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s_2'^2}{n}\right)^2}$
Variância	$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	
Relação de variâncias	$\frac{S_1'^2}{S_2'^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$	

Distribuições de Amostragem

Formulário

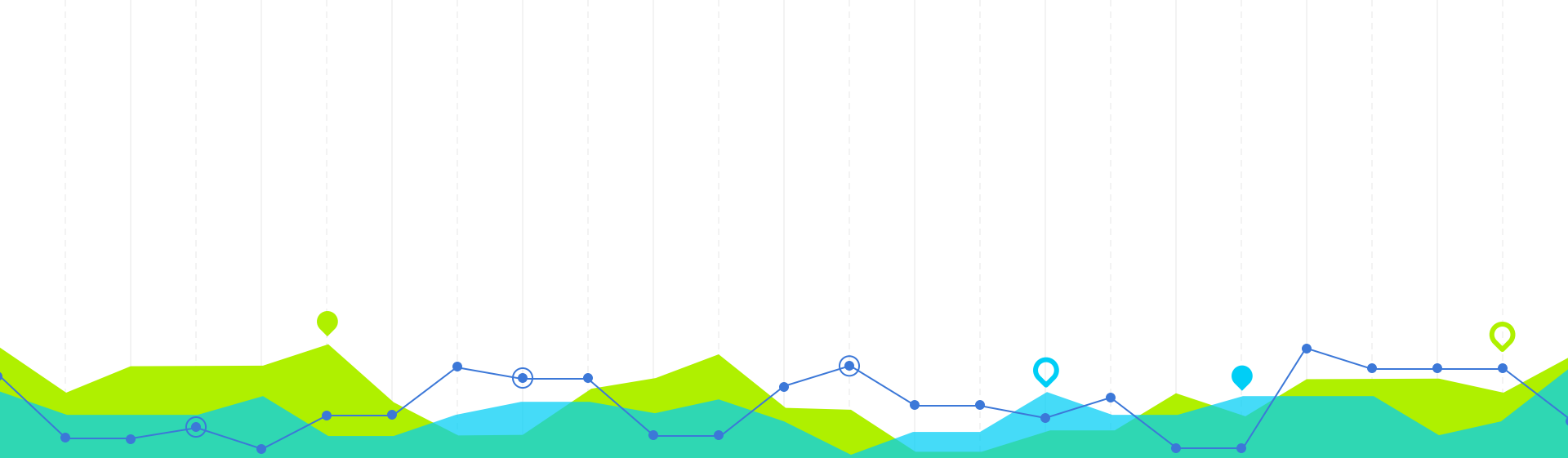
• GRANDES AMOSTRAS

Caso geral

Média	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$	$\frac{\bar{X} - \mu}{S' / \sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de médias	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$

População de Bernoulli

Proporção	$\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$
Diferença de proporções	$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{m} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$



Estimação Pontual

Estimadores e Estimativas

3

Estatística

i) ESTATÍSTICA: uma estatística é uma função (qualquer) que depende da amostra e não depende de nenhum parâmetro desconhecido.

Exemplo: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\lambda = ?$

a.a. $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$

$$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$$

$$T_2 = 3 :$$

$$T_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \lambda)^2$$

Quais destas funções são estatísticas?

Slides Professora Cláudia Nunes

Estatística

i) ESTATÍSTICA: uma estatística é uma função (qualquer) que depende da amostra e não depende de nenhum parâmetro desconhecido.

Exemplo: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\lambda = ?$

a.a. $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$

$T_1 = \bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$: É UMA ESTATÍSTICA

$T_2 = 3$: É UMA ESTATÍSTICA

$T_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \lambda)^2$ NÃO É ESTATÍSTICA !!

Slides Professora Cláudia Nunes

Estatística

DEF. 4: ESTATÍSTICA:

Uma estatística é uma função das variáveis observáveis, e é por si própria uma variável observável que não contém qualquer parâmetro desconhecido.

EXEMPLO 5: Seja a a.a. $[X_1, X_2, \dots, X_n]$. A média amostral $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ é uma estatística.

EXEMPLO 6: Seja a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ e σ^2 desconhecidos, então $x - \mu$ não é estatística porque não é observável, é função do parâmetro desconhecido μ .

EXEMPLO 6: Seja uma v.a. com distribuição $N(\mu; \sigma^2)$ Quais são Estatísticas?

a) $X^2 - \mu$

d) $X - 4$

b) $\frac{X}{\sigma^2}$

e) $X - \log X^3$

c) $X^2 - 3$

Quais destas funções são estatísticas?

[apostila.PDF \(ufpr.br\)](http://apostila.PDF(ufpr.br))

Estimador

ii) ESTIMADOR : é uma estatística que toma valores no espaço do parâmetro desconhecido

Exemplo: $X \sim \text{Ber}(p)$ $p = ?$ $p \in [0, 1]$

a. c. $(X_1, \dots, X_{20})$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{20} X_i$$

$$T_2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i$$

$$T_3 = \frac{\bar{X} - p}{1 - p}$$

Quais destas funções
são estimadores do
parâmetro p ?

Slides Professora Cláudia Nunes

Estimador

ii) ESTIMADOR : é uma estatística que toma valores no espaço do parâmetro desconhecido

Exemplo: $X \sim \text{Ber}(p)$ $p = ?$ $p \in [0,1]$

a. c. $(X_1, \dots, X_{20})$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{20} X_i \in \{0, 1, \dots, 20\} \neq [0,1]$$

$$T_2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i = \bar{X} \in [0,1] \quad \checkmark$$

$$T_3 = \frac{\bar{X} - p}{1-p}$$

não é estimador
porque não segue a
estatística

Slides Professora Cláudia Nunes

Estimador vs. Estimativa

Dada uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ chama-se **estatística** a uma função da amostra aleatória que não envolve parâmetros desconhecidos.

Definição

Chama-se **estimador** de θ a uma estatística que a cada amostra observada faz corresponder um valor que estima θ , a que chamamos uma **estimativa** de θ .

$\Theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um estimador
 $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma estimativa

[modulol aula3 4 Estimação.pdf](#)

Não confundir

- estimador – variável aleatória
- estimativa – valor aproximado do parâmetro, obtido pelo estimador usando uma amostra particular

Definição: Um estimador dum parâmetro da população é uma variável aleatória (v. a.) que depende da informação amostral e cujas realizações fornecem aproximações para o parâmetro desconhecido. A um valor específico assumido por este estimador para uma amostra em concreto chama-se **estimativa**.

Estimador vs. Estimativa

Exemplo: São estimadores

$$\text{i) } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i / n \quad \text{e} \quad \text{ii) } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Observada, por exemplo, a amostra **(1, 2, 0, 3, 1, 5)**

As estimativas associadas àqueles estimadores são:

$$\text{i) } \bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 2 \quad \text{e} \quad \text{ii) } s^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 3.2$$

Consideremos o caso de termos uma dada população com distribuição $F(x|\theta)$, com um **parâmetro desconhecido θ** .

Como se podem definir vários estimadores de um parâmetro, põe-se o problema de escolher, se possível “o melhor”. Há então que considerar certas **propriedades que um estimador deve verificar**.

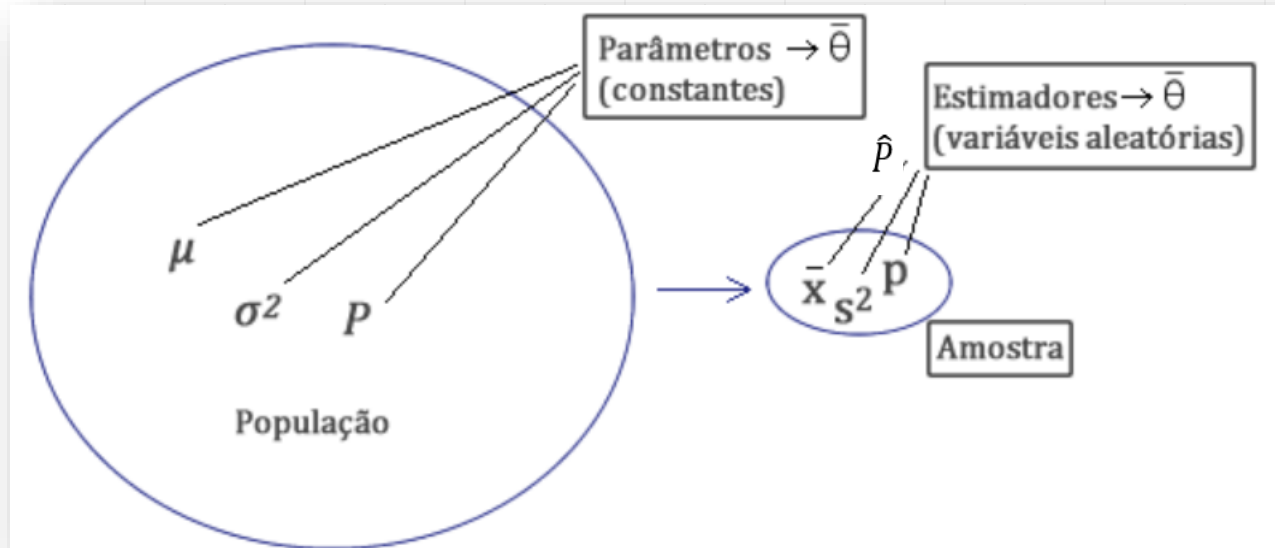
Conceitos Básicos

Parâmetro é uma quantidade numérica, em geral desconhecida, que descreve uma característica da população. Normalmente é representado por letras gregas como μ e σ , entre outras.

Estimador é uma função dos valores da amostra que utilizamos para estimar um parâmetro populacional. Os estimadores, em geral, são representados por letras gregas com acento circunflexo: $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, etc.

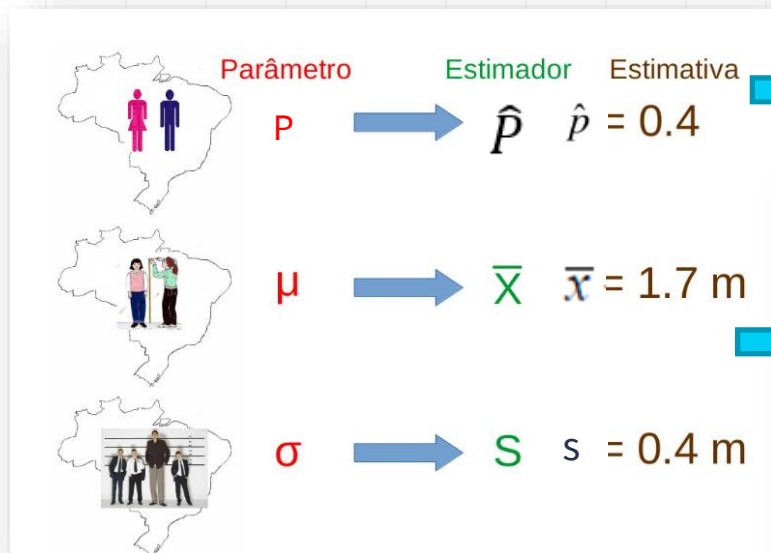
Estimativa é o valor numérico obtido através do estimador.

Estimadores vs. Estimativas



<http://tics.ifsul.edu.br/matriz/conteudo/disciplinas/est/uk/1/3.html>

Estimadores vs. Estimativas



<https://me323-unicamp.github.io/aulas/slides/parte10/parte10.html>

Sendo X o número de elementos da amostra (n) que apresenta a característica de estudo:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

A estimativa do parâmetro da proporção populacional (P) é dada por esta fórmula; e o respectivo estimador é X/n .

Parâmetro Desconhecido	Estadística Estimador	Estimativa Pontual
μ	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	$\bar{x}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}$	s^2

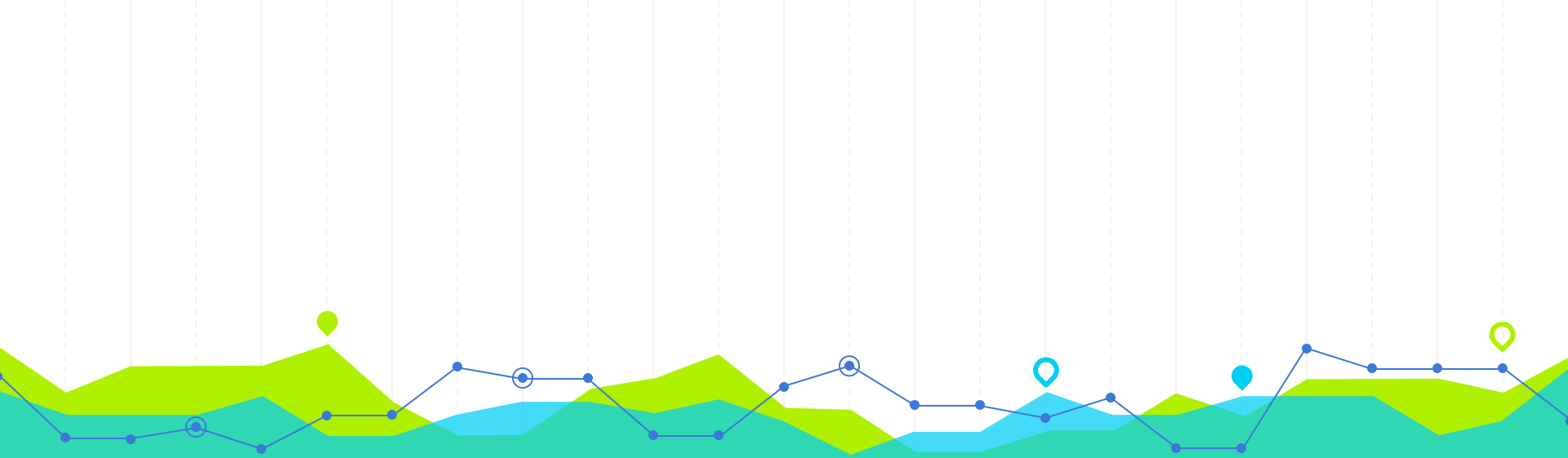
<https://sites.google.com/site/estatisticabasicacc/conteudo>

Variância corrigida (s^2)	Variância não corrigida (s^2)
$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Resumo dos Principais Estimadores e Estimativas em estudo...

Parâmetro a estimar	Estimador	Estimativa
μ	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
σ^2	$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
p	$\hat{P} = \frac{X^{(a)}}{n}$	$\hat{p} = \frac{x^{(b)}}{n}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
σ_1^2 / σ_2^2	S_1^2 / S_2^2	s_1^2 / s_2^2
$p_1 - p_2$	$\hat{P}_1 - \hat{P}_2$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

(a) X - v.a. que conta ... e $\sim$ (b) x - número observado de sucessos na amostra de dimensão n .



Método dos Momentos

Estimadores

4

Métodos de Estimação

Vamos então falar dos principais métodos de estimação paramétrica.

Dos **métodos de estimação paramétrica** vamos referir:

- o Método dos momentos e
- o Método da Máxima verosimilhança

Métodos dos Momentos

Introduzido por Karl Pearson no início do século XX, foi o primeiro método de estimação a ser apresentado e que tem uma filosofia muito simples.

O método consiste em:

– considerar como estimadores dos parâmetros desconhecidos as soluções das equações que se obtêm igualando os momentos teóricos aos momentos empíricos.

Momentos empíricos ou
Momentos amostrais

Momentos teóricos ou
Momentos populacionais

É um método de aplicação geral, tendo como única condição que a distribuição tenha um número suficiente de momentos (teóricos).

[moduloI_aula3_4_Estimação.pdf](#)

Métodos dos Momentos

Sejam $\theta_1, \dots, \theta_k$ parâmetros desconhecidos de uma v.a. X .
O método dos momentos consiste em igualar momentos teóricos e momentos empíricos, i.e.,

$$E[X] = m'_1 \quad \text{c/} \quad m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$E[X^2] = m'_2 \quad \text{c/} \quad m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\vdots$$

$$E[X^k] = m'_k \quad \text{c/} \quad m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ são os chamados **momentos empíricos**, calculados à custa da amostra $(x_1, \dots, x_n)$.

Aquelas igualdades dão-nos **estimativas** que são concretização dos **estimadores** com as expressões correspondentes.

Métodos dos Momentos: Exemplo

Considere-se $X \cap N(\mu, \sigma^2)$. Quais são os estimadores dos momentos de μ e σ^2 ?



Métodos dos Momentos: Exemplo

Exemplo

Consideremos $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Quais os **estimadores** de momentos de μ e σ^2 ?

Tem-se :

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu & \text{e} & & M'_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \\ E[X^2] &= \sigma^2 + \mu^2 & \text{e} & & M'_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu^* &= \bar{X} \\ (\sigma^2)^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \mu^{*2} \Rightarrow (\sigma^2)^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \bar{x} \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \end{cases}$$

modulol aula3_4 Estimaco.pdf

Portanto, os estimadores so:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) S^2 \end{cases}$$

Variana no corrigida (s^2)

Variana corrigida (s^2)

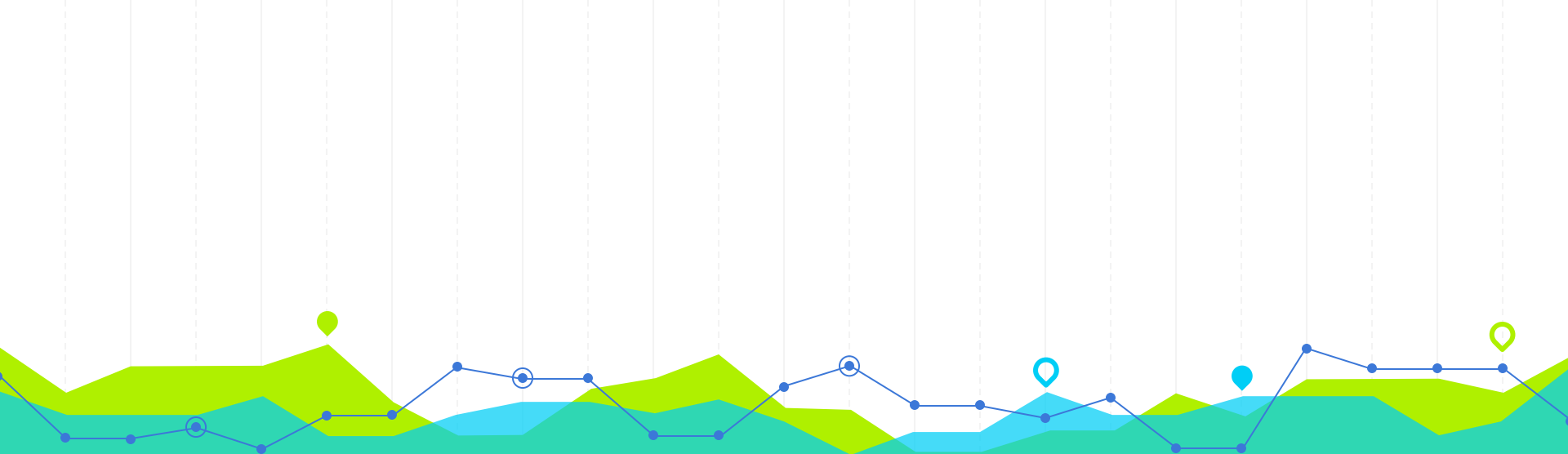
$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Métodos dos Momentos

Os cálculos não são complicados, mas no cálculo dos momentos empíricos aparecem potências de expoente elevado quando há muitos parâmetros, conduzindo a estimativas instáveis.

Por isso, **como regra prática deve evitar-se recorrer ao método dos momentos para mais de quatro parâmetros.**

Nota: Os estimadores obtidos pelo método dos momentos são menos eficientes do que os estimadores de máxima verosimilhança, que passamos já a apresentar.



Método dos Momentos: Exercícios

Estimadores

5

Exercício 1: Suponha que $X_1, X_2, \dots, X_n$ é uma a.a. proveniente de uma distribuição exponencial com o parâmetro λ . Determine o estimador dos momentos de λ .



Exercício 1: Estimador dos Momentos

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, 0 \leq x < \infty$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

1º Momento da Amostra: $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$

1º Momento da População: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

Método dos Momentos: $E[X] = \bar{x}$

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{x}$$

MM

$$\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Exercício 2: Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ uma a.a. que segue uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x|\alpha) = (\alpha + 1) \cdot x^\alpha \cdot I_{(0,1)}(x) \quad \alpha > 0.$$

Encontre um estimador para α utilizando o método dos momentos.



Exercício 2: Estimador dos Momentos

Solução pelo método de momentos: $\mu_1' = m_1$

$$\mu_1' = E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = (\alpha+1) \cdot \int_0^1 x^{\alpha+1} dx = (\alpha+1) \cdot \left[\frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_0^1$$

Logo, $\mu_1' = \boxed{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$Pf=F$
$c, c \in \mathbb{R}$	$c x$
$x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Exercício 2: Estimador dos Momentos

Assim,

$$m_1 = \mu'_1 \implies \frac{\hat{\alpha} + 1}{\hat{\alpha} + 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} + 1 &= (\hat{\alpha} + 2) \cdot \bar{X} \\ \hat{\alpha} + 1 &= \hat{\alpha} \bar{X} + 2 \bar{X} \\ \hat{\alpha} (1 - \bar{X}) &= 2 \bar{X} - 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$\hat{\alpha} = \frac{2 \bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}$$

é o estimador para α pelo métodos dos momentos.

1. Seja uma população com função probabilidade

$$f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x \quad (x = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

onde $0 < \theta < 1$. Sabe-se que $E(X) = (1-\theta)/\theta$. Recolhida uma amostra casual de dimensão 1000 observou-se $\sum_{i=1}^{1000} x_i = 980$.

- Obtenha uma estimativa para θ pelo método dos momentos.
- Determine o estimador de máxima verosimilhança para θ .
- Calcule, justificando, a estimativa da máxima verosimilhança para a média da população.
- Reparametrize a distribuição em função de $\mu = E(X)$, e utilize a nova função probabilidade para estimar a média da população.
- Mostre que $T = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ é estatística suficiente para θ .



3. Considere uma variável aleatória X cuja distribuição depende dos parâmetros α e θ , para a qual se tem $E(X) = \alpha \theta$ e $\text{Var}(X) = \alpha \theta^2$. Sabendo que numa amostra casual de 320 observações se obteve $\sum_{i=1}^{320} x_i = 22.2$ e $\sum_{i=1}^{320} x_i^2 = 535.8$, apresente, justificando, uma estimativa para os parâmetros desconhecidos.



4. Num saco existem θ bolas, numeradas de 1 a θ . Extraiu-se, ao acaso e com reposição, uma amostra de três bolas, tendo-se observado: 13, 5, 9.
- a) Calcule a estimativa do número de bolas existentes no saco, pelo método dos momentos.
 - b) Obtenha a estimativa da máxima verosimilhança para θ .
 - c) Com base nas estimativas obtidas nas alíneas anteriores o que pode dizer sobre os estimadores que as originaram.



5. Considere uma amostra casual de dimensão n retirada de uma população com distribuição dada por:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta}, \quad (-\theta < x < \theta), \text{ para } \theta > 0.$$

Calcule um estimador para θ pelo método dos momentos.



Obrigada!

Questões?

