Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

<u>Matemática I</u> – Semestre 2 - 2025/2026

Época de Recurso – 5 de Junho de 2026

Duração: $(120 + \varepsilon)$ minutos, $|\varepsilon| \leq 30$

Versão A

Nome ....

ID Estudante #: ....

Parte I

- Complete os seguintes espaços de forma a obter proposições verdadeiras. As alíneas são independentes.
- Não necessita de justificar as suas respostas.

(a) *(12)* Tendo em conta o conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 2\} \cup \{7, 8, 9\}.$$

podemos concluir que:

- $\operatorname{ad}(S) =$ .... (aderência ou fecho de S)
- O conjunto dos pontos de acumulação de S é ....
- $\max S =$ .... (máximo de S)
- O conjunto S é uma vizinhança de $x =$ .... (dê exemplo de um elemento de S)

(b) *(10)* Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma **progressão geométrica** de termos positivos tal que $g_2 = 6$ e $g_3 = 2$. Então:

- A razão de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $r =$ .... e $g_1 =$ ....
- $g_n =$ .... (termo geral de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$)
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} g_n =$ ....

(c) *(9)* Considere as funções reais f e g tais que

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}, \quad x \neq -1 \qquad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Então:

- O domínio de $g \circ f$ é $D_{g\circ f} =$ ....
- $(g \circ f)'(3) =$ ....
- A equação da assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ é:

  ....

(d) *(6)* Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, tal que o seu polinómio de Taylor de segunda ordem centrado em $x = a$ é:

$$P_2(x) = 5 - 3(x-a) + 4(x-a)^2.$$

Então:

- $f''(a) =$ ....
- Em $x = a$, o gráfico de f tem concavidade voltada para .... (cima/baixo).

(e) *(9)* Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 3$ é dada pela equação $y = -2x + 10$. Então:

- $f(3) =$ .... e $f'(3) =$ ....
- Considerando a aproximação linear, $f(3.05) \approx$ ....

(f) *(9)* Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t}\, dt$$

Então:

- $\lim_{x \to +\infty} F(x) =$ ....
- $F'(x) =$ ....
- F é uma função monótona .... no intervalo $]0, +\infty[$.

(g) *(12)* No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, 0)$, e $\vec{w} = (k, 1, -1)$, onde $k \in \mathbb{R}$. Podemos concluir que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ .... e $\|\vec{u}\| =$ ....
- O valor de k para o qual $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são **ortogonais** é $k =$ ....
- Se $k = 1$, então $2\vec{u} - 3(\vec{v} + \vec{w}) = (....,....,....)$.

(h) *(14)* Considere a matriz $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

- Os zeros de $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, são

$$\lambda_1 = \text{.........} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \text{.........}$$

- $\det(\mathbf{M}^n) =$ .... (escreva o valor em termos de n).
- $(\mathbf{M}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} .... & .... \\ .... & .... \end{bmatrix}$.

(i) *(9)* Considere o sistema linear $\mathbf{A}X = \mathbf{B}$ com 3 variáveis x_1, x_2, x_3. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz 4×3 e seja $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ a matriz aumentada do sistema.

- Se $r(\mathbf{A}) = 2$ e $r(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 2$, sistema é classificado como .... e o seu grau de liberdade é ....

- Para que o sistema seja **possível e determinado** (solução única), a característica $r(\mathbf{A})$ tem de ser igual a ....

Parte II

- Nas questões que se seguem, apresente justificações completas e sucintas.
- Para obter pontuação, deve apresentar todos os cálculos relevantes. Se não indicar a forma como resolve a questão, pode receber pouca ou nenhuma pontuação, mesmo que a resposta final esteja correta.

---

1. Prove, através do **Princípio de Indução Matemática**, a igualdade seguinte, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

2. Considere a função **contínua** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + kx} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ e^{ax} + bx & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde $a, b, k \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $k = 2$.

(b) Encontre a relação entre a e b tal que f é **diferenciável** em $x = 0$.

(c) Assuma $a = 2$ e $b = 1$. Encontre o valor $c \in (-1, 0)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{1}$$

3. Considere a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Considerando a **substituição** $u = 1 + x^2$, calcule $\int f(x)\, dx$.

   (b) Seja R a região limitada pelo gráfico de f, o eixo dos xx e as retas verticais $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$. Calcule o valor exato da área de R.

4. Considere a matriz $\mathbf{M} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e a matriz $\mathbf{P} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ definidas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Encontre os valores de λ para os quais as colunas de $\mathbf{M}$ são **linearmente dependentes**.

   (b) Mostre que $\mathbf{P}$ é invertível e calcule $\det(2\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{M}^T)$ em termos de λ.

   (c) Encontre os valores de λ para os quais o sistema $(\mathbf{M} - \mathbf{M}^T)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, tem infinitas soluções.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares com parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ e variáveis x, y, z.

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = 1 \\ x + (a-1)y + z = b \\ x + y + (a-1)z = b^2 \end{cases}$$

   Classifique o sistema (possível, impossível, solução única ou infinitas soluções) de acordo com os valores dos parâmetros a e b.

Cotações

I	II.1	II.2(a)	II.2(b)	II.2(c)	II.3(a)	II.3(b)	II.4(a)	II.4(b)	II.4(c)	II.5
90	10	10	10	10	10	10	10	10	10	20