

EXERCÍCIOS 1*

Complementos de Álgebra Linear

Valores e vetores próprios

1. Determine se 5 é um valor próprio de

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Para as seguintes matrizes, determine se o λ dado é valor próprio, justificando. Em caso afirmativo, determine um vetor próprio correspondente.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 2$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 4$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = -2$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 3$

3. Determine se o vetor dado é um vetor próprio das respetiva matrizes. Em caso afirmativo, determine o valor próprio correspondente.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

4. Determine uma base[†] para cada um dos espaços próprios das matrizes seguintes:

a) $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

*Versão: 6 de setembro de 2026.

[†]Chama-se *base* de um espaço vetorial V a qualquer subconjunto $\mathcal{B}$ de V que verifique as duas condições seguintes: $\mathcal{B}$ gera V e $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Neste caso, queremos saber uma família de vetores próprios associados aos valores próprios da matriz.

$$\text{h)} \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5. \text{ Determine os valores próprios de } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Se $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ , determine $A^3\mathbf{x}$.

$$7. \text{ Para } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ determine, sem efetuar cálculos, um valor próprio de } A. \text{ Justifique.}$$

8. Determine, sem efetuar cálculos, um valor próprio e dois vetores próprios linearmente independentes de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Justifique.

9. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

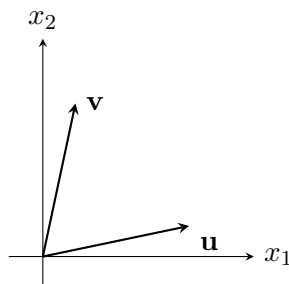
- Se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum vetor $\mathbf{x}$, então λ é um valor próprio de A .
- Se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum escalar λ , então $\mathbf{x}$ é um vetor próprio de A .
- Uma matriz A é invertível se e só se 0 é um valor próprio de A .
- Um número c é um valor próprio de A se e só se a equação $(A - cI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem uma solução não trivial.
- Para determinar os valores próprios de A , basta reduzir A à forma escalonada.
- Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são vetores próprios linearmente independentes, então correspondem a valores próprios distintos.
- Os valores próprios de uma matriz encontram-se na sua diagonal principal.
- Se $\mathbf{v}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 2 , então $2\mathbf{v}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 4 .

10. Seja λ um valor próprio de uma matriz invertível A . Mostre que λ^{-1} é um valor próprio de A^{-1} .

11. Mostre que, se A^2 é a matriz nula, então o único valor próprio de A é 0 .

12. Mostre que λ é um valor próprio de A se e só se é um valor próprio de A^T .

13. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os vetores representados na figura. Suponha que são vetores próprios de uma matriz A de tipo 2×2 , associados aos valores próprios 2 e 3 , respetivamente. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ e seja $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Represente cuidadosamente, no mesmo referencial, os vetores $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ e $T(\mathbf{w})$.



14. Repita o Exercício ??, supondo agora que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores próprios de A associados aos valores próprios -1 e 3 , respetivamente.
15. Sabe-se que a multiplicidade algébrica de um valor próprio λ é sempre maior ou igual à dimensão do espaço próprio correspondente. Determine h de modo que o espaço próprio associado a $\lambda = 6$ seja bidimensional, para

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 9 & h & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

16. Seja A uma matriz $n \times n$ com n valores próprios reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, repetidos de acordo com as respetivas multiplicidades, de modo que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Explique por que razão $\det A$ é igual ao produto dos n valores próprios de A . O resultado continua válido para qualquer matriz quadrada quando se consideram valores próprios complexos.

17. (Computador) Considere

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 28 & 21 \\ 4 & -15 & -12 \\ -8 & a & 25 \end{bmatrix}.$$

Para cada $a \in \{32, 31.9, 31.8, 32.1, 32.2\}$, determine o polinómio característico de A e os respetivos valores próprios. Em cada caso, represente graficamente o polinómio característico

$$p(t) = \det(A - tI), \quad 0 \leq t \leq 3.$$

Sempre que possível, represente todos os gráficos no mesmo referencial e descreva de que modo revelam as alterações dos valores próprios quando a varia.

Matrizes simétricas e formas quadráticas

18. Mostre que, se A é uma matriz simétrica, então A^2 também é simétrica.
19. Determine se as matrizes seguintes são simétricas:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

20. Descreva uma matriz simétrica semidefinida positiva em termos dos seus valores próprios.

21. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a forma quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ para cada um dos vetores seguintes:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};$ b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix};$ c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$

22. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a forma quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ para cada um dos vetores seguintes:

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$ b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix};$ c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$

23. Determine a matriz associada a cada uma das formas quadráticas seguintes, supondo que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

a) $4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2;$
b) $5x_1^2 + 4x_1x_2.$

24. Determine a matriz associada a cada uma das formas quadráticas seguintes, supondo que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$:

a) $5x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3;$
b) $8x_1x_2 + 10x_1x_3 - 6x_2x_3.$

25. Classifique as formas quadráticas seguintes:

a) $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$	f) $5x_1^2 + 12x_1x_2$
b) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$	g) $-3x_1^2 - 7x_2^2 - 10x_3^2 - 10x_4^2 + 4x_1x_2 +$ $4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 6x_3x_4$
c) $4x_1^2 - 8x_1x_2 - 2x_2^2$	h) $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 8x_1x_2 + 8x_3x_4 -$ $6x_1x_4 + 6x_2x_3$
d) $-2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$	
e) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$	

26. Determine o maior valor possível da forma quadrática

$$4x_1^2 + 9x_2^2$$

sujeita à condição $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1$, isto é, $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

27. Indique, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa: se A é simétrica e a forma quadrática $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ assume apenas valores negativos para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então todos os valores próprios de A são positivos.

28. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

e considere a forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. Verifique que:

- a) Q é definida positiva se $\det A > 0$ e $a > 0$;
- b) Q é definida negativa se $\det A > 0$ e $a < 0$;
- c) Q é indefinida se $\det A < 0$.