

Simulação e Otimização

Capítulo 1: Soluções incompletas



1. O PL da alínea (b) é uma relaxação do da alínea (a) e o PL da alínea (a) é relaxação do da alínea (d).

2. (a) $x^{RL} = (3, 0) \implies z = z^{RL} = 15$

(b) $x^{RL} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \implies z^{RL} = \frac{24}{5} \leq z$

3. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \min & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.a: } & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{aligned} \max z &= 10u + (16 - 8u)x_1 + (10 - 2u)x_2 - ux_3 + (4 - 4u)x_4 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \text{ e } u \geq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \min z &= 3u_1 + 3u_2 + (3 - 2u_1 - 5u_2)x_1 + (2 - 5u_1 - 2u_2)x_2 \\ \text{sujeito a: } & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0 \text{ e } u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5. (a) i. $x^* = (0, 1, 0, 0), z(2) = 26$
 ii. $x^* = (1, 0, 0, 1), z(0.5) = 19$
 iii. $x^* = (1, 0, 0, 0), z(1) = 18$
 iv. $x^* = (0, 0, 0, 0), z(2) = 60 \implies$ Melhor limite $z(1)$

- (b) i. $x^* = (8, 0), z(1, 1) = -26$
 ii. $x^* = (0, 4), z(3/8, 3/8) = -1/4$
 iii. $x^* = (8, 0), z(0, 1) = -13$
 iv. $x^* = (0, 0), z(0, 1/2) = 3/2 \implies$ Melhor limite $z(0, 1/2)$

6. Considere o seguinte problema de PLIM.

(a)

$$\begin{aligned} \min z(u_1, u_2) &= 41u_1 + (7 - u_1 - u_2)x_{11} + (8 - u_2)x_{12} + (3 - u_1)x_{21} + 5x_{22} + (7 - u_1)x_{31} + 9x_{32} + \\ & \quad (150 + 38u_2)y_1 + 94y_2 + 105y_3 \\ \text{s. a: } & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 55 \\ & x_{21} + x_{22} \leq 32y_2 \\ & x_{31} + x_{32} \leq 30y_3 \\ & y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ e } u_1 \geq 0, u_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Por exemplo, $z(1, -1) = 426 \leq z$.

7.

$$z(u, v, y) = \max\{c(x) + u(b - Ax) + v(d - Dx) + y(t - Tx) : x \in X \cap \mathbb{Z}^n\}$$

$$w^{DL} = \min\{z(u, v, y) : u \leq 0, v \geq 0 \text{ e } y \text{ livre}\}$$

8. Considere o seguinte PLI.

$$\begin{aligned} (P) \equiv \max z &= x_1 + 10x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

(a) $x^{RL} = (0, 3/2)$ e $z^{RL} = 15$

(b)

$$\begin{aligned} \max z(u) &= 4u + (1 - 4u)x_1 + (10 - u)x_2 \\ \text{s.a: } x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros.} \end{aligned}$$

i. $z(0) = 11$, $z(1/4) = 43/4$ e $z(4) = 22$.

ii. $z(u) = \begin{cases} 11 - u, & 0 \leq u \leq 1/4 \\ 10 + 3u, & 1/4 \leq u \leq 10 \\ 4u, & u \geq 10 \end{cases}$

iii. $w^{DL} = z(1/4) = 43/4 \geq z$.

(c)

$$\begin{aligned} \max z(u) &= 3u + (1 - u)x_1 + (10 - 2u)x_2 \\ \text{s.a: } 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

i. Satisfaz pois desenhando a RA vemos que todos os pontos extremos são inteiros.

ii. Como satisfaz a propriedade de integralidade, $w^{DL} = z^{RL} = 15$.

9. (...)

10. (a) $x^* = (3, 6)$ e $z = 39$.

(b) $x^* = (2, 2)$ e $z = 12$.

11. $x^* = (0, 13, 20, 7)$ e $z = 505$.

12. Considere o seguinte problema de PLI

(a) $x^{RL} = (45/26, 12/26)$ e $z^{RL} = 33/26 \geq z$.

(b) $x^* = (2, 1)$ e $z = 1$.

(c) Seja $u \geq 0$. Considere

$$\begin{aligned} (P_u) \equiv \max z &= x_1 - x_2 + u(3 - 2x_1 + x_2) \\ \text{s.a: } 6x_1 + 10x_2 &\geq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

Para mostrar que $v(P_u) \geq v(P)$ basta mostrar que P_u é uma relaxação de P .
 P_0 é ilimitado. $v(P_{1/2}) = 3/2$. $v(P_1) = 3$

13. (a) $\hat{z} = 31$ e $\underline{z} = 26$.
 (b) Cancelados: 8, 9 e 7. Ramificados: 4 e 6.
14. (a) $x^* = (7, 0)$ e $z = 21$.
 (b) $x^* = (2, 5)$ e $z = -1$.
15. i. Não é desigualdade válida.
 ii. Não é desigualdade válida.
 iii. É desigualdade válida mas não é corte.
 iv. É desigualdade válida e é corte.
16. (a) $x^* = (1, 1)$ e $z = 11$.
 (b) $X^* = (1, 0)$ e $z = 1$.
17. Corte de Gomory: $7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 24$.
18. $x^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$.
19. $2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1$
20. $x_1 + x_2 \leq 1$ e $x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$.
21. $y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$
22. $x_i \leq y, \forall i \in \{1, \dots, m\}$