

Programação Matemática II

Capítulo 1: Programação por Metas



1. Considere a seguinte ocorrência de um problema de programação linear por metas:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } P_1(s_1^- + s_1^+) + P_2(s_2^-) \\ &\text{sujeito a: } -x_1 + x_2 + s_1^- - s_1^+ = 2 \\ &\quad x_1 + s_2^- - s_2^+ = 3 \\ &\quad x_2 \leq 3 \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ &\quad x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Resolva graficamente o problema. Caso a ordem das prioridades seja invertida, a solução obtida altera-se?
- (b) Resolva o problema pelo método do Simplex.
2. Considere o conjunto de restrições definido por:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que se pretende atingir as seguintes metas por ordem de prioridade:

1. $x_1 \leq 3$.
 2. $x_1 \geq x_2$.
 3. $x_2 \leq 6$.
- (a) Formule o problema em programação por metas.
- (b) Resolva o problema utilizando o método gráfico.
3. Considere o conjunto de restrições definido por:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \\ -x_1 + x_2 &\geq -5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponha que se pretende atingir as seguintes metas por ordem de prioridade:

1. $x_2 \geq 2x_1$ e $2x_1 + x_2 \leq 10$.
 2. $x_1 \geq 2$ e $x_2 \geq 8$. Considere peso 2 para a primeira condição e peso 1 para a segunda.
 3. $x_2 = 4x_1$.
- (a) Formule o problema em programação por metas.
- (b) Resolva o problema utilizando o método gráfico.

4. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 1 \\x_1 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\leq 10 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Supondo que se querem atingir as seguintes metas, por ordem de prioridade:

1. $x_1 \geq 2$
2. $x_2 = x_1$
3. $x_1 + x_2 = 4$
4. $x_2 \geq 5$

Formule e resolva o problema apresentado utilizando o método do Simplex. Considere a solução $(x_1, x_2) = (1, 0)$ como SBA inicial.

5. Considere o conjunto de restrições definido por:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\geq 5 \\2x_1 + x_2 &\leq 20 \\x_1 - x_2 &\geq -5 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Suponha que se pretende atingir as seguintes metas por ordem de prioridade:

1. $-2x_1 + x_2 \leq 2$ e $x_1 \leq 5$. Considere peso 2 para a primeira condição e peso 3 para a segunda.
 2. $4x_1 + x_2 \geq 20$ e $4x_1 - x_2 \geq 10$.
 3. $x_2 \geq 6$ e $x_2 \leq 2x_1 - 6$.
- (a) Formule o problema em programação por metas.
- (b) Resolva o problema utilizando o método gráfico.
6. A direção de um banco decidiu encerrar balcões ficando com funcionários que pretende reafetar na diversificação das suas atividades. Para aproveitar as 460 horas semanais de mão de obra excedentária decidiu iniciar dois novos negócios: N1) intermediação de créditos e N2) aconselhamento fiscal. Estima-se que os lucros semanais proporcionados pelos novos negócios serão de 8 e 10 u.m., por cada novo cliente. Por sua vez, cada novo cliente, consumirá semanalmente 14 horas e 16 horas no caso de N1 e N2, respetivamente. A direção pretende lançar os novos negócios garantindo um lucro não inferior a 340 e uma aderência de pelo menos 20 novos clientes, em média, em cada negócio por semana.
- (a) Formule o problema em programação por metas e resolva-o. Elabore um relatório com os valores e recomendações que considere relevantes.
- (b) Resolva de novo o problema, supondo que a direção admite que não conseguir os 20 clientes, em média, para a intermediação de créditos é 6 vezes mais penalizador do que não conseguir os 20 clientes, em média, para o negócio do aconselhamento fiscal.
- (c) Considerando que não satisfazer pedidos de novos clientes é muito penalizador para o banco, sendo 20 e 15 vezes mais penalizador do que a não satisfação do lucro, para N1 e N2, respetivamente, a direção pondera recorrer a mais mão de obra para o apoio a estes serviços. Tendo ainda como objetivo minimizar o recurso a esta mão de obra extra, proponha uma solução.

7. Certa empresa comercializa dois produtos alimentares, P1 e P2, que geram um lucro unitário de 5 e 3 u.m., respetivamente. Diariamente, a empresa dispõe de 100 unidades de P1 e de 180 unidades de P2. Na loja da empresa é possível arrumar um máximo de 200 unidades de P2, ou o seu equivalente em unidades de P1. Cada unidade de P1 necessita de metade do espaço ocupado por uma unidade de P2. Sabendo que a empresa pretende, em primeiro lugar, obter pelo menos uma margem de lucro de 1500 u.m. e, em segundo lugar, utilizar da melhor forma o espaço disponível, formule o problema e resolva-o.
8. Para conseguir mais receitas, a direção de uma escola pensou em disponibilizar o seu espaço para diferentes atividades durante o fim-de-semana, em número nunca superior a 4 atividades por dia. Cada hora disponibilizada para uma festa de aniversário dá um lucro de 6 u.m., ocupando o espaço por 5 horas, enquanto com os jogos lúdicos a escola lucra 5 u.m. por hora, durante as 4 horas de cada jogo. Para apoio a estas atividades a direção dispõe de 580 u.m. para contratar os serviços de uma firma de segurança que cobra 4 u.m. por hora de apoio a uma festa e 3 u.m. por hora de apoio aos jogos lúdicos. A escola pretende um lucro mínimo mensal (4 fins-de-semana) de 900 u.m. e não exceder o montante disponível para o pagamento à firma de segurança, realizando tantas festas como jogos lúdicos. Formule este problema e resolva-o.
9. Uma faculdade dispõe de um montante de 66 mil u.m. destinado a financiar a campanha publicitária para o lançamento de um novo curso. Pretende usar na campanha cartazes e anúncios nas redes sociais sobre os quais recolheu a informação que consta na tabela seguinte.

	Custos	N.º de alunos
Anúncios nas redes sociais	2000	1200
Cartaz	100	100

A direção da faculdade pretende, por ordem decrescente de importância:

1. Não exceder o orçamento;
2. Fazer pelo menos 300 cartazes; e
3. Atingir, com os anúncios nas redes sociais, pelo menos 22 mil potenciais alunos.

Proponha uma campanha publicitária e indique qual é o número máximo de potenciais alunos que é possível atingir com cada meio publicitário.

10. Uma exploração agrícola dispõe de 100 hectares (ha) de terreno para cultivo de milho ou de batatas. Durante o verão, a mão de obra para as tarefas de colheita é limitada, dispondo-se de apenas 480 h.h.. Em média, são precisas 6 h.h. para colher cada ha de milho e 3 h.h. por ha de batata. Além disso, o dono da exploração assumiu já o compromisso de semear pelo menos 45 ha de batata. Foram estimadas margens unitárias de 90 e 60 u.m., respetivamente, por ha cultivado de milho e de batata.
 - (a) Formule o problema de programação linear em que se pretende maximizar a margem total.
 - (b) Considere que o dono da exploração não ficou satisfeito com a solução resultante da alínea (a), tendo afirmado: “As restrições estão corretas, mas os meus objetivos não se identificam com a maximização da margem. Como primeira prioridade contento-me com uma margem de 500. Em segundo lugar, pretendo repartir a mão de obra igualmente entre as duas culturas. Em terceiro lugar, quero produzir pelo menos 50 ha de milho”. Formule e resolva este problema.
11. A Mantel produz carrinhos de brincar cujo conjunto final deve incluir obrigatoriamente quatro rodas e dois assentos. A fábrica que produz estas peças opera em três turnos por dia. A tabela seguinte apresenta as quantidades produzidas de cada peça nos três turnos:

Idealmente, o número de rodas produzidas deve ser exatamente o dobro do número de assentos. Contudo, como as taxas de produção variam de turno para turno, pode não ser possível obter um equilíbrio exato na produção. A Mantel está interessada em determinar o número de ciclos de produção em cada turno que minimize o desequilíbrio na produção das peças.

Turno	Rodas	Assentos
1	500	300
2	600	280
3	640	360

As limitações de capacidade restringem o número de ciclos de produção entre 4 e 5 para o turno 1, entre 10 e 20 para o turno 2, e entre 3 e 5 para o turno 3. Formule o problema em programação por metas e resolva-o.

12. A *Camyo Manufacturing* produz 4 peças que requerem a utilização de um torno e de uma prensa, que operam 10 horas por dia. A tabela seguinte contém o tempo requerido, em minutos, de cada peça em cada máquina.

Máquina	Peça			
	1	2	3	4
Torno	10	5	6	8
Prensa	5	12	8	4

É desejável equilibrar o tempo de utilização das duas máquinas, limitando a diferença entre o seu tempo total de operação a 30 minutos. Além disso, a procura por cada peça é de, pelo menos, 25 unidades. Adicionalmente, o número de peças 1 não pode exceder o número de peças 2. Considerando que a meta de satisfazer a procura é 2 vezes mais importante que a meta do equilíbrio do tempo de operação das duas máquinas e que não é possível haver tempo extra na utilização das máquinas, formule o problema em programação por metas e resolva-o.

13. O gabinete de admissões da Universidade de Ozark está a processar as candidaturas de caloiros para o próximo ano letivo. As candidaturas dividem-se em três categorias: locais (do próprio estado), de outros estados e internacionais. As proporções de homens para mulheres nos candidatos locais e de outros estados são de 1:1 e 3:2, respetivamente. Para os estudantes internacionais, a proporção correspondente é de 8:1. A pontuação no *American College Test* (ACT) é um fator importante na aceitação de novos estudantes. As estatísticas recolhidas pela universidade indicam que as pontuações médias no ACT para estudantes locais, de outros estados e internacionais são de 27, 26 e 23, respetivamente. O gabinete de admissões estabeleceu as seguintes metas desejáveis para os novos caloiros:

- O número de novos caloiros é de pelo menos 1200 estudantes.
- A pontuação média no ACT para todos os estudantes admitidos é de pelo menos 25.
- Os estudantes internacionais constituem pelo menos 10% da nova turma.
- A proporção de mulheres para homens é de pelo menos 3:4.
- Os estudantes de outros estados constituem pelo menos 20% da nova turma.

Formule o problema em programação por metas e resolva-o.

14. Dois produtos são fabricados em duas máquinas. A tabela seguinte apresenta os tempos necessários em cada máquina, em minutos, para produzir cada unidade dos dois produtos.

Máquina	Produto	
	1	2
1	5	3
2	6	2

As quotas diárias de produção para os produtos 1 e 2 são de 80 e 60 unidades, respetivamente. Cada máquina opera 8 horas por dia. O tempo extra nas máquinas, embora não seja desejável, pode ser utilizado se necessário para cumprir a quota de produção. Formule o problema em programação por metas e resolva-o. Indique quanto tempo extra é necessário para satisfazer as quotas diárias de produção.

15. Uma agência governamental planeia enviar auxílio a 3 países em vias de desenvolvimento, P_1 , P_2 e P_3 . Os preços de compra para sangue e antibióticos são de 5 US\$ e 3 US\$ por unidade, respetivamente. A agência tem 2 000 000 US\$ disponíveis e pretende fazer chegar 180 000 unidades de sangue e 200 000 unidades de antibióticos, se possível.

Durante o transporte de sangue prevê-se uma perda diária de 5%. Na tabela seguinte indicam-se, para cada país, os tempos e custos de transporte (iguais para o sangue e antibióticos), bem como as necessidades de sangue que devem obrigatoriamente ser satisfeitas.

	P_1	P_2	P_3
Tempo de Transporte	3 dias	5 dias	2 dias
Custo unitário do transporte	2 \$	5 \$	1.5 \$
Necessidade de sangue	50 000	30 000	0

A agência definiu os seguintes níveis de prioridades:

1. Satisfazer a procura de de sangue e antibióticos, admitindo que o sangue é 3 vezes mais importante do que os antibióticos.
2. Garantir que o tempo médio de viagem não excede os 3,2 dias.
3. Cumprir o orçamento disponível.

Formule o problema em programação por metas e resolva-o.