Topologia de Espaços Métricos

Exercício 1. Considere o conjunto $\mathcal{C} = C^0([0;1])$ das funções contínuas no intervalo $[0;1]$ e a função $d : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^2, \quad d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

a. Mostre que $(\mathcal{C}, d)$ é um espaço métrico.
b. Sendo $\mathcal{I}$ o conjunto das funções Riemann-integráveis no intervalo $[0;1]$, $(\mathcal{I}, d)$ é igualmente um espaço métrico?

Exercício 2. Seja $\mathbf{E}$ um conjunto e d a função definida em $\mathbf{E}^2$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = y \\ 1 & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}.$$

a. Mostre que d é uma distância (dita «distância grosseira» sobre $\mathbf{E}$).

b. Mostre que todos os subconjuntos de $\mathbf{E}$ são abertos.

c. Mostre que as sucessões convergentes de $\mathbf{E}$ são exatamente as sucessões estacionárias (isto é, as sucessões constantes a partir de certa ordem).

d. Considere que $\mathbf{E} = \mathbb{N}$. Mostre que $\mathbf{E}$ é fechado e limitado mas que não é compacto.

e. Mostre, de forma mais geral, que se $\mathbf{E}$ for infinito, $\mathbf{E}$ é fechado e limitado mas não compacto.

Exercício 3. Considere, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, as quantidades

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}, \;\text{ e }\; ||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}.$$

a. Mostre que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas sobre $\mathbb{R}^n$.

b. Sejam d_1, d_2 e d_∞ as distâncias induzidas pelas normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$, respetivamente.

- Tomando $n = 2$, esboce, para cada uma destas distâncias, as bolas centradas em 0 e de raio 1.
- Mostre que as três distâncias são equivalentes.

Exercício 4. Considere $\mathbb{R}[X]$ o espaço dos polinómios de coeficientes reais.
Seja, para $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$, a quantidade

$$\|P\| = \max\{|a_i| \,:\, 1 \leq i \leq n\}.$$

a. Mostre que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

b. Seja $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \,:\, \|P\| \leq 1\}$.

Mostre que B é fechado, limitado, mas não é compacto.

Exercício 5. Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e defina analiticamente o interior, a fronteira e o derivado de cada um deles.

a. $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \wedge xy \geq 0\big\}$.

b. $B = \mathbb{Q}^2$.

c. $C = \left\{\left(\dfrac{n}{2n+1}, y\right) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y + \dfrac{n}{2n+1} \leq 1\right\}$.

d. $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \,:\, y > 0\big\} \setminus \left\{\left(\dfrac{1}{n}, y\right) \in \mathbb{R}^2 \,:\, n \in \mathbb{N} \wedge 0 < y \leq 1\right\}$.

Exercício 6. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que

a. A é um conjunto aberto se e só se $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$.

b. A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}^n \backslash A$ é um conjunto fechado.

c. Dado um conjunto de índices $\mathcal{I}$ e uma família de conjuntos $(A_i)_{i\in\mathcal{I}}$, mostre que

$$\Big(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i^c.$$

e deduza, utilizando o resultado anterior, que toda a interseção de conjuntos fechados é fechada.

Exercício 7. Considere o conjunto $X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy > 1\big\}$.

a. Dê um exemplo de uma sucessão de pontos de X convergente para um ponto $l \notin X$.

b. Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X? Justifique.

Exercício 8. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de f, D_f, represente-o geometricamente e diga, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.

Exercício 9. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-x)\,(1-y)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto aberto? Fechado? Justifique.

Exercício 10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{\ln\left(1-4x^2-(y+1)^2\right)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto compacto? Justifique.

Exercício 11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(1-\sin(x))(y-x^2)}}{\ln(x+y-2)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f.
c. D_f é um conjunto aberto? Fechado? Justifique.

Exercício 12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sqrt{(x-2)\,(16-x^2-y^2)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

Exercício 13. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \ln(xy)\sqrt{\left(1-x^2-(y-1)^2\right)}.$$

a. Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.