



LISBON
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Cap. 3 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão (Optativa)

aula 1

M Cândida Mourão
cmourao@iseg.ulisboa.pt

2019/20

1

Análise de Decisão



- Análise de Decisão
 - Modelação
 - Critérios de Decisão
 - Não Probabilísticos
 - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel* – instalar como *add in*
- Decisão Com Incorporação de Experiência


2019/20

M Cândida Mourão

2

2

Análise de Decisão - Modelação




- 1) **Ações: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$**
 - Identificar e enumerar TODAS as Ações de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar ações
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
 - **Objetivo** – escolher uma e uma só ação de A

- 2) **Estados da Natureza: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$**
 - Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
 - Ocorre um e um só estado!
 - O decisor só conhece o estado depois de escolhida a ação

2019/20
M Cândida Mourão
3

3

Análise de Decisão - Modelação




- 3) **Função Ganho (Proveito)**
 - Avaliar as ações em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências
 - $p(a_i, \theta_k)$ ganho de tomar a ação $a_i \in A$ e o estado da natureza ser $\theta_k \in \Theta$ ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$)
 - Eliminar do estudo eventuais **ações dominadas!**

 - **Critérios de Decisão**
 - Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
 - Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verosimilhança

2019/20
M Cândida Mourão
4

4



Análise de Decisão – Exemplo 1


Exemplo Protótipo - (H&L, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

2019/20
M Cândida Mourão
5

5



Decisão Sem Experiência – Exemplo 1

➤ Identificar ações e estados da natureza


The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

<p>Ações:</p> <p>a_1 – manter o terreno e explorar</p> <p>a_2 – vender o terreno</p>	<p>Estados da natureza:</p> <p>θ_1 – existe petróleo</p> <p>θ_2 – não existe petróleo</p>
---	--

2019/20
M Cândida Mourão
6

6



Decisão Sem Experiência – Exemplo 1

Ações:

- a_1 – manter o terreno e explorar
- a_2 – vender o terreno

Estados da natureza:

- θ_1 – existe petróleo
- θ_2 – não existe petróleo


➤ Identificar a matriz de ganhos

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2
a_1		
a_2		

2019/20
M Cândida Mourão
7

7



Decisão Sem Experiência – Exemplo 1

Ações:


- a_1 – manter o terreno e explorar
- a_2 – vender o terreno

Estados da natureza:

- θ_1 – existe petróleo
- θ_2 – não existe petróleo

➤ Matriz de ganhos

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2
a_1	700	-100
a_2	90	90



Qual escolher ?

2019/20
M Cândida Mourão
8

8

Análise de Decisão

Problemas a responder

- Que ação escolher?
- Qual o ganho esperado da ação escolhida?
- Valerá a pena efetuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza? ↩

Será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma?

Qual o Preço de reduzir a incerteza? ⇕

- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para eliminar a incerteza?

2019/20 M Cândida Mourão 9

9


Decisão Sem Experiência

Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão **MAXIMIN** (Wald, 1945)

- Critério pessimista ➡ a natureza “é do contra”! O estado de natureza será o pior possível para a ação que o decisor escolher.
- Cada Ação natureza é adversa o ganho mínimo

Ação **maximin** ➡ maximiza o ganho mínimo


$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} \{p(a_i, \theta_k)\} \right\}$$


Abraham Wald
(1902-1950)

2019/20 M Cândida Mourão 10

10

Decisão Sem Experiência – Exemplo 1




➤ Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	min
a_1	700	-100	
a_2	90	90	

2019/20
M Cândida Mourão
11


11

Decisão Sem Experiência – Exemplo 1



➤ Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	min
a_1	700	-100	-100
a_2	90	90	90



máx

R: a ação maximin é $\tilde{a} = a_2!$

2019/20
M Cândida Mourão
12

12

Decisão Sem Experiência



Princípio de Decisão MAXIMIN

Vantagens

- Protege o decisor contra o “pior caso”
- Garante um ganho mínimo
- Não permite perdas disparatadas


Adapta-se a situações de

- Forte aversão ao risco
- Concorrência agressiva

2019/20
M Cândida Mourão
13

13

Decisão Sem Experiência – Exemplo 2




Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-80	-90	-50
a_2	22000	30000	-100

2019/20
M Cândida Mourão
14

14



Decisão Sem Experiência – Exemplo 2


Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	-80	-90	-50
a_2	2200	3000	-100

R: ação maximin é $\tilde{a} = a_1!$ 😬

2019/20
M Cândida Mourão
15

15



Decisão Sem Experiência

Critério de Decisão Probabilístico

Princípio de Decisão Bayes

Informação do decisor sobre os estados da natureza (v.a.) traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição **a priori**


$$h_\theta(k) = P[\theta = \theta_k] \quad \text{probabilidade } a \text{ priori do estado } \theta_k$$

Princípio de Bayes - ação que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a ação correspondente a:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{E[p(a_i, \theta)]\}$$

2019/20
M Cândida Mourão
16

16



Decisão Sem Experiência – Exemplo 1

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo


$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

2019/20
M Cândida Mourão
17

17



Decisão Sem Experiência – Exemplo 1

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1


$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (-100) = 100$ ← $a_h = a_1!$

$E[p(a_2, \theta)] = 90$

R.: _____

2019/20
M Cândida Mourão
18

18




Decisão Sem Experiência

- Estudar matéria até página 159
- Resolver o exercício 6.1

2019/20 M Cândida Mourão 19

19



LISBON
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Cap. 3 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão (Optativa)


aula 2

M Cândida Mourão
cmourao@iseg.ulisboa.pt

2019/20

20

Análise de Decisão




- Análise de Decisão
 - Modelação
 - Critérios de Decisão
 - Não Probabilísticos
 - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- **Árvores de Decisão**
- Resolução com o *Tree Plan/Excel* – instalar como *add-in*
- Decisão Com Incorporação de Experiência

2019/20 M Cândida Mourão 21

21

Árvores de Decisão



Especialmente úteis quando:

- 1) Existem ações sequenciais no tempo (experiências, ...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

Árvore de Decisão - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – a escolha do caminho a seguir é do decisor
- Nodos Causais** (ou aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

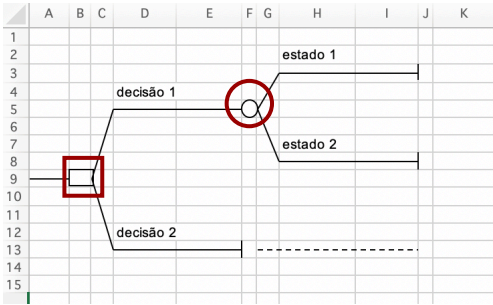
2019/20 M Cândida Mourão 22

22

Árvores de Decisão



Árvore – grafo conexo e sem ciclos



Excel / TreePlan

2019/20
M Cândida Mourão
23

23

Árvores de Decisão



Excel / TreePlan

- Juntar o *TreePlan* aos *add-ins* do Excel – o ficheiro que está no Aquila na pasta dos restantes *add-ins* do Excel
- Selecionar, dentro do Excel, o Treeplan, tal como fizemos com o Solver
- Para iniciar uma árvore clicar em “CTRL+Shift+T” ou “CTRL+T” – comando para trabalhar no TreePlan – cuidado que é difícil o “undo”!



2019/20
M Cândida Mourão
24

24

Árvores de Decisão – Exemplo 1

“CTRL+T”

Ramo de decisão – ligação que parte de um nodo de decisão – colocar ação (“manter e perfurar”; “vender”)

2019/20 M Cândida Mourão 25

25

Árvores de Decisão – Exemplo 1

Juntar toda a informação e dados – as colunas assinaladas a azul têm fórmulas, não podem ser alteradas


Nos ramos de decisão – colocar ação (“manter e perfurar”; “vender”) e ganho associado (–100 = custo de manter e perfurar; 90 = ganho de vender)

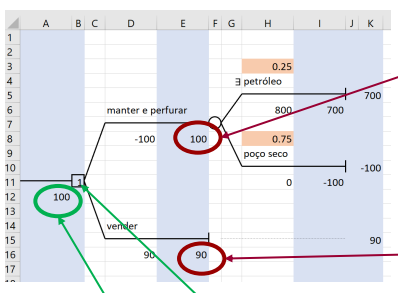
Ramo causal – ligação que parte de um nodo causal – escrever estado da natureza (“∃ petróleo”; “poço seco”); a correspondente probabilidade de ocorrência (1/4; 3/4) e ganho associado (800 = ganho se existir petróleo; 0 = ganho se poço seco)

2019/20 M Cândida Mourão 26

26

Árvores de Decisão – Exemplo 1





Valor esperado da ação “manter e perfurar” cuja ligação termina neste nodo causal

Valor esperado da ação “vender”


Valor esperado da ação Bayes – ação do ramo “1”, “manter e perfurar”

R.: _____

2019/20
M Cândida Mourão
27

27

Decisão Com Experiência




➤ Valor a pagar para

- eliminar TODA a incerteza? Para obter informação perfeita (EVPI)
- diminuir a incerteza? Para realizar uma experiência, sondagem, etc. (EVE)

$EVPI \geq EVE$

2019/20
M Cândida Mourão
28

28



Decisão Com Experiência

- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** = valor que o decisor paga para **eliminar** a incerteza, para ter a certeza de qual dos estados se irá observar!
- a_h = ação Bayes (sem experiência), com ganho esperado $E[p(a_h, \theta)]$

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$


com EP = ganho esperado com informação perfeita (IP), ou seja:

$$EP = \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$$

e \tilde{a}^k é a ação a escolher se o estado da natureza é θ_k (melhor ação para $\theta = \theta_k$)

2019/20
M Cândida Mourão
29

29



Análise de Decisão - Exemplo

Exemplo Protótipo - (H&L, pg. 673)


The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil.

2019/20
M Cândida Mourão
30

30



Valor Esperado da Informação Perfeita

Exemplo 1

➤ Valor esperado da Informação Perfeita - *EVPI*

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Valor a pagar para **eliminar** a incerteza! Para ter a certeza se existe ou não petróleo

➤ Se souber que $\theta = \theta_1$ escolho a_1 com ganho 700


➤ Se souber que $\theta = \theta_2$ escolho a_2 com ganho 90

$$\Rightarrow EP = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times 90 = 242,5$$

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)] = 242,5 - 100 = 142,5 > EVE$$

2019/20
M Cândida Mourão
31

31



Decisão Com Experiência

➤ Se realizar uma experiência (**diminuir** a incerteza) a ação a escolher deve depender do resultado da experiência. O decisor deve ter uma **função de decisão** que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência

➤ **Questões:**


- Deve ou não ser feita a experiência?
- Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?

➤ Optando pela **função de decisão Bayes**, a ação é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado para as probabilidades revistas (**a posteriori**), tendo em conta cada um dos possíveis resultados da experiência e as probabilidades destes resultados!

2019/20
M Cândida Mourão
32

32

Decisão Com Experiência



Considerando

- a credibilidade da experiência (comportamento em situações passadas)

e

- as probabilidades *a priori*


calculam-se as probabilidades *a posteriori*, as probabilidades revistas para cada estado da natureza e cada um dos possíveis resultados da experiência

- **Questões:**
 - Deve ou não ser feita a experiência?
 - Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?
- **Árvores de Decisão!**

2019/20
M Cândida Mourão
33


33

Decisão Com Experiência



Seja:


- S v.a. : informação adicional da experiência
- $h_{\theta}(k)$: probabilidades *a priori*
- $Q_{S|\theta=\theta_k}(s) = P(S = s | \theta = \theta_k)$: **função de verosimilhança** da experiência


 credibilidade da experiência em face de resultados passados

- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. conjunta do par aleatório (θ, S)
- $P(S = s) = \sum_{k=1}^n P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. marginal da v.a. S

2019/20
M Cândida Mourão
34

34




Decisão Com Experiência

➤ **Método:**

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P(\theta = \theta_k | S = s) = \frac{P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)}{\sum_{k=1}^n [P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)]}$$




- As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.

- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a ação Bayes
- 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de S e as ações Bayes para cada resultado possível.

➤ **Árvores de Decisão** – alternativa!

2019/20
M Cândida Mourão
35

35



Decisão Com Experiência - Exemplo

Exemplo Protótipo (continuação – H&L pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 *u.m.*.

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: **PE** (é provável a existência de petróleo) ou **NPE** (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- a) Valerá a pena efetuar um teste sísmico?
- b) Qual a ação que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- c) Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

2019/20
M Cândida Mourão
36

36

Decisão Com Experiência – Exemplo 1

2019/20 M Cândida Mourão 37

37

Decisão Com Experiência – Exemplo 1

Ficheiro "Posterior Probabilities.xls" (AQUILA)

Só preenchamos esta 1ª tabela

Prob. a priori

Dados		P(Finding State)			total
		Finding - Verosimilhança			
State of Nature	Prior Probability	PE/estado	NPE/estado		n
Há Petróleo	0.25				
Não há	0.75				
Total					1,00

Função Verosimilhança – credibilidade do teste sísmico


O teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

Posterior Probabilities:		P(State Finding)			Total
		State of Nature			
		Há/teste	NãoHá/Teste		
PE					0
NPE					0
Total					0

2019/20 M Cândida Mourão 38

38

Decisão Com Experiência – Exemplo 1



Ficheiro "Posterior Probabilities.xls" (AQUILA)

Só preenchamos esta 1ª tabela

Template for Posterior Probabilities

State of Nature	Prior Probability	P(Finding State)		total
		PE/estado	NPE/estado	
Há Petróleo	0,25	0,6	0,4	1
Não há	0,75	0,2	0,8	1
				0
				0
				0
Total	1,00			

Função Verosimilhança – credibilidade do teste sísmico

O teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

Prob. a priori

Cálculos automáticos

Posterior Probabilities:

	Prior Probability	P(State Finding)		Total
		Há/teste	NãoHá/Teste	
PE	0,3	0,5	0,5	1
NPE	0,7	0,142857	0,85714286	1
				0
				0
Total	1			


Prob. a posteriori

Prob. dos resultados do teste

2019/20 M Cândida Mourão 39

39

Decisão Com Experiência – Exemplo 1



Colocar Dados na subárvore que inclui o estudo

Prob. de o resultado da experiência ser "PE"

Prob. de o resultado da experiência ser "NPE"

– custo do estudo

ganho correspondente

Probabilidades a posteriori quando o resultado da experiência é "PE"

Probabilidades a posteriori quando o resultado da experiência é "NPE"

Posterior Probabilities:	P(State Finding)	
	Há/teste	NãoHá/Teste
PE	0,3	0,5
NPE	0,7	0,142857

2019/20 M Cândida Mourão 40

40

Decisão Com Experiência – Exemplo 1

Resposta: ler a árvore da esquerda para a direita até ao último nodo de decisão!

1º) Deve ser realizado o teste sísmico (ramo 1) e o valor esperado do ganho total é de 123

2º) Se o resultado do teste indicar que é provável existir petróleo ("PE") deve-se manter o terreno e perfurar (ramo 1)

3º) Se o resultado do teste indicar que não é provável existir petróleo ("NPE") deve-se vender o terreno (ramo 2)

2019/20 M Cândida Mourão 41

41

Decisão Com Experiência – Exemplo 1

Ganho Esperado do Teste Sísmico, EVE?

Retirando o custo do teste

EVE = ganho esperado do teste – ganho esperado da ação Bayes sem informação adicional

$EVE = 153 - 100 = 53$

$53 > 30 = \text{custo do teste}$


$\therefore \text{é vantajoso fazer o teste!}$

$EVE = 53 < EVPI = 142,5 !$

2019/20 M Cândida Mourão 42

42

Análise de Decisão



- Estudar matéria
- Resolver os exercícios 6.2; 6.3 e 6.7

2019/20 M Cândida Mourão 43