

Exercício 20 (capítulo 4 do livro):

- (a) Determine a função de densidade conjunta da variável (X, Y) .

Solução: Dada a independência entre X e Y tem-se que $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$. Consequentemente,

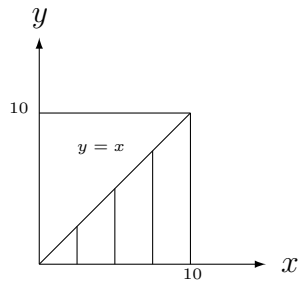
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{10-x}{500}, & 0 < x < 10, 0 < y < 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- (b) Calcule a percentagem de dias em que a pessoa viaja nesse comboio.

Solução: A pessoa apanha o comboio sempre que este sai da estação depois da pessoa chegar. Assim a probabilidade requerida é

$$\begin{aligned} P(Y < X) &= \int_0^{10} \int_0^x f_{X,Y}(x, y) dy dx = \int_0^{10} \int_0^x \frac{10-x}{500} dy dx \\ &= \int_0^{10} \frac{10x - x^2}{500} dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Para perceber o domínio de integração, pode observar a seguinte representação gráfica:



- (c) Qual a probabilidade de a pessoa ter de esperar mais de dois minutos até à partida desse comboio?

Solução: A probabilidade requerida é

$$\begin{aligned} P(X > Y + 2) &= \int_2^{10} \int_0^{x-2} \frac{10-x}{500} dy dx \\ &= \int_2^{10} \frac{10-x}{500} (x-2) dx = \frac{64}{375}. \end{aligned}$$

Para perceber o domínio de integração, pode representá-lo graficamente tal como na alínea anterior. Note que, nesse caso, a recta $y = x - 2$ cruza o eixo das abcissas em $x = 2$.