PROCESSOS ESTOCÁSTICOS E APLICAÇÕES

EXERCÍCIOS

JOSÉ PEDRO GAIVÃO

Exercício 1. Seja X uma variável aleatória contínua em $[0, +\infty[$. Mostre que

$$E(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx$$

Solução:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty y f(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y dx \right) f(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty f(y)\, dy\, dx \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx \end{aligned}$$

Exercício 2. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes com densidade de probabilidade f_X e f_Y, respectivamente. Mostre que a densidade de probabilidade de $Z = X + Y$ é

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - \eta) f_Y(\eta)\, d\eta$$

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Z \leq z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} f_X(x) f_Y(y - x)\, dy\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(y - x)\, dx \right) dy \end{aligned}$$

Exercício 3. Uma empresa produz diariamente N componentes electrónicas, onde N é uma variável aleatória com distribuição de Poisson e parâmetro $\lambda > 0$. Cada componente pode ter um defeito, independentemente das restantes, com probabilidade p. Supomos também que o defeito de cada componente é independente do número N de componentes electrónicas. Seja D o número diário de componentes electrónicas com defeito. Determine:

(1) $E(D|N = n)$
(2) $E(D)$
(3) $E(N|D = d)$

Solução:

(1) Seja $D = \xi_1 + \cdots + \xi_N$ onde ξ_n são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Bernoulli. Então:

$$\begin{aligned} E(D|N = n) &= E(\xi_1 + \cdots + \xi_N|N = n) \\ &= E(\xi_1 + \cdots + \xi_n|N = n) \\ &= E(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \\ &= np. \end{aligned}$$

De facto, $\mathbb{P}(D|N = n)$ é a distribuição Binomial(n,p).

(2)

$$E(D) = \sum_{n=0}^{\infty} E(D|N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} np\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = p\lambda$$

(3) Usando a lei de probabilidade total mostramos que $D \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. Logo,

$$\begin{aligned} E(N|D = d) &= \sum_{n=d}^{\infty} n\mathbb{P}(N = n|D = d) \\ &= \sum_{n=d}^{\infty} n\mathbb{P}(D = d|N = n)\frac{\mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(D = d)} \\ &= (1 - p)\lambda + d \end{aligned}$$

Exercício 4. Seja $\Omega = \{0, 1, 2\}$ e considere a família de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$X_t(\omega) = \omega t, \quad t \geq 0.$$

(1) Classifique o processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ indicando o conjunto dos parâmetros T e o conjuntos dos estados E.
(2) Determine todas as realizações do processo.
(3) Calcule $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$ e $\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1)$.

Solução:

(1) $T = E = [0, \infty[$, portanto é um processo estocástico contínuo a tempo contínuo.
(2) $t \mapsto 0$, $t \mapsto t$ e $t \mapsto 2t$.

(3) $\{X_1 = 1\} = \{1\}$ e $\{X_2 = 1\} = \emptyset$. Logo $\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \emptyset$ e $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$. Como $\{X_2 = 2\} = \{1\}$, temos que $\mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. Logo,
$$\mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 2, X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = 1.$$

Exercício 5. Seja $(\xi_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias de Bernoulli independentes e
$$X_n = \min\{k \geq 1 \colon \xi_1 + \cdots + \xi_k = n\}, \quad n \geq 1.$$

(1) Supondo que ξ_n representa o resultado (sucesso ou insucesso) de uma experiência aleatória, descreva o significado da variável aleatória X_n. Que valores pode tomar?
(2) Classifique o processo estocástico $\{X_n \colon n \geq 1\}$ indicando o conjunto dos parâmetros T e o conjunto dos estados E.
(3) Determine a distribuição de probabilidade de X_n.
(4) Calcule $\mathbb{P}(X_3 = x_3|X_2 = x_2)$.

Solução:

(1) X_n representa o número mínimo de experiências de Bernoulli tal que no total se observaram n sucessos. X_n toma valores inteiros $k \geq n$.
(2) $T = E = \mathbb{N}$, logo é um processo estocástico discreto a tempo discreto.
(3) Seja $p = \mathbb{P}(\xi_n = 1)$. Então,
$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_{n-1}^{k-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k \geq n.$$
(4) Suponhamos que $x_3 > x_2$ (caso contrário a probabilidade é zero). Então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = x_3|X_2 = x_2) &= \mathbb{P}(\min\{k \geq 1 \colon \xi_1 + \cdots + \xi_k = 3\} = x_3|X_2 = x_2) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq x_2 + 1 \colon \xi_{x_2+1} + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3|X_2 = x_2) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq x_2 + 1 \colon \xi_{x_2+1} + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3) \\
&= \mathbb{P}(\min\{k \geq 1 \colon \xi_1 + \cdots + \xi_k = 1\} = x_3 - x_2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_3 - x_2) \\
&= p(1-p)^{x_3 - x_2 - 1}
\end{aligned}$$

Exercício 6. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias iid, $\theta \in \mathbb{R}$ e $Y_n = X_n - \theta X_{n-1}$. Mostre que o processo estocástico $Y = \{Y_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, usualmente designado por processo de médias móveis de primeira ordem MA(1), é estacionário até à segunda ordem.

Solução: Como $(X_n)_{n\geq 1}$ é iid temos que $\mu = E(X_n)$ e $\sigma^2 = E(X_n^2)$. Seja $n \geq m$. Então
$$\operatorname{Cov}(Y_n, Y_m) = E(Y_n Y_m) - (1-\theta)^2 \mu^2.$$

Mas

$$E(Y_nY_m) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) - 2\theta\sigma^2, & n-m=0 \\ (1-\theta+\theta^2)\mu^2 - \theta\sigma^2, & n-m=1 \\ (1-\theta)^2\mu^2, & n-m>1 \end{cases}$$

Portanto, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m)$ é uma função de $n-m$, logo o processo é estacionário até à segunda ordem.

Exercício 7. Seja $0 < p < 1$. Considere $X_0 = 0$ e

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

onde $(\xi_n)_{n\geq 1}$ é uma sucessão iid de variáveis aleatórias com distribuição

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1-p.$$

(1) Mostre que $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov.
(2) Determine a matriz de transição da cadeia.
(3) Desenhe o diagrama da cadeia.
(4) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.
(5) Mostre usando indução que

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = 0) = C_j^n p^j (1-p)^{n-j}.$$

Solução:

(1) Os incrementos $\xi_n = X_n - X_{n-1}$ são iid, logo $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov.
(2)

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

(3) Trivial
(4) Como $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$, temos que

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = k) P_{k,1}^{(2)} = P_{0,1}^{(2)} = 2(1-p)p$$

(5)

$$\begin{aligned} P_{0,j}^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{0,k}^{(n)} P_{k,j} \\ &= P_{0,j-1}^{(n)} P_{j-1,j} + P_{0,j}^{(n)} P_{j,j} \\ &= C_{j-1}^n p^{j-1}(1-p)^{n-(j-1)} \times p + C_j^n p^j (1-p)^{n-j} \times (1-p) \\ &= (C_{j-1}^n + C_j^n) p^j (1-p)^{n+1-j} \\ &= C_j^{n+1} p^j (1-p)^{n+1-j} \end{aligned}$$

Exercício 8. Uma cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ com estados $S = \{0,1,2\}$ tem a seguinte matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(1) $\mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 0)$
(2) $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 0)$
(3) $\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0)$

Solução:

(1)

$$\mathbb{P}(X_3 = 1 | X_1 = 0) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = 0.27$$

(2) Porque a cadeia é homogénea, $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 0) = 0.27$.
(3)

$$\mathbb{P}(X_3 = 1, X_2 = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) * 0.1 * 0.2$$

Exercício 9. Considere um modelo de aprovisionamento (descrito no Exemplo 3.11 do texto de apoio) onde apenas 0, 1, ou 2 artigos são procurados em cada período ($a_k = 0$ para $k \geq 3$) com probabilidade

$$\mathbb{P}(\xi_n = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\xi_n = 1) = \frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\xi_n = 2) = \frac{1}{10}.$$

Suponha que $s = 0$ e $m = 2$.

(1) Determine a matriz de transição de probabilidades P para a cadeia de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ onde X_n é o número de artigos em stock no fim do período n. (Dica: $S = \{2, 1, 0, -1\}$.)
(2) Calcule $\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 0)$.
(3) Calcule $\mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 1)$.

Solução:

(1) Ordenando as colunas e linhas da matriz segundo $\{2, 1, 0, -1\}$,

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/5 & 1/10 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 2 | X_0 = 0) = P_{0,2} P_{2,1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

(3)

$$\mathbb{P}(X_3 = 0|X_1 = 1) = P^{(2)}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 \\ 2/5 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$$

Exercício 10. Considere uma cadeia de Markov homogénea com estados $S = \{0, 1\}$ e matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1.$$

(1) Mostre por indução que

$$P^n = \frac{1}{p+q} \left(\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} \right), \quad n \geq 1.$$

(2) Determine se os estados são recorrentes ou transientes. No caso de recorrentes determine se são positivos ou nulos.
(3) Calcule m_0 e m_1.
(4) Calcule

$$\pi_i = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i|X_0 = 0), \quad i \in \{0, 1\},$$

e compare π_i com m_i.
(5) Mostre que

$$\pi = \pi P$$

onde π é o vector linha formado por π_0 e π_1 calculados na alínea anterior.

Solução:

(1) Seja $A = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$ e $B = (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$. Temos que $PA = A$ e $PB = (1-p-q)B$.
(2) $\sum_{n\geq 0} P^{(n)}_{00} = \frac{1}{p+q} \sum_n (q + (1-p-q)^n p) = \infty$. Logo, 0 é um estado recorrente. Analogamente se conclui que 1 também é recorrente. Numa cadeia com S finito os estados recorrentes são sempre positivos.
(3)

$$m_0 = \frac{p+q}{q} \quad \text{e} \quad m_1 = \frac{p+q}{p}.$$

(4)

$$\pi_0 = \frac{q}{p+q} \quad \text{e} \quad \pi_1 = \frac{p}{p+q}.$$

Portanto, $m_i = \frac{1}{\pi_i}$.
(5) Simples de verificar.

Exercício 11. Uma urna contém inicialmente duas bolas, uma branca e outra preta. Uma bola é retirada ao acaso e substituída por uma bola de cor oposta. O processo é repetido um número infinito de vezes. Seja X_n o número de bolas brancas na urna no instante $n \geq 0$.

(1) Mostre que X_n é uma cadeia de Markov homogénea e determine a matriz de transição P.
(2) Calcule P^n.
(3) Suponhamos que inicialmente a urna contém duas bolas brancas. No passo seguinte, uma bola branca é substituída por uma preta e por aí adiante. Determine:
 (a) A probabilidade de reencontrar ao longo do processo duas bolas brancas na urna.
 (b) O tempo médio que temos de esperar até encontrar novamente duas bolas brancas na urna.

Solução:

(1) Note-se que $S = \{0, 1, 2\}$. Como

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{se } X_n = 0 \\ X_n + \xi_{n+1} & \text{se } X_n = 1 \\ X_n - 1 & \text{se } X_n = 2 \end{cases}$$

onde ξ_n são variáveis de Bernoulli (simétricas) iid, temos que $(X_n)_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov homogénea e

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^3 = P.$$

(3) (a)

$$\mathbb{P}(X_n = 2 \text{ para algum } n \geq 1 | X_0 = 2) = 1$$

porque o estado 2 é recorrente, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{2,2}^{(n)} = +\infty.$$

 (b) $m_2 = 4$

Exercício 12. Construa uma cadeia de Markov homogénea onde $P_{i,i}^{(Per(i))} = 0$ para algum estado i da cadeia.

Solução: Seja

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Temos que $P_{0,0} = 0$ e $P_{0,0}^{(n)} > 0$ para todo $n \geq 2$. Logo o estado 0 é aperiódico ($Per(0) = 1$) e $P_{0,0}^{(Per(0))} = 0$.

Exercício 13. Mostre que se $P_{i,i} > 0$, então o estado i é aperiódico.

Solução: Segue da equação de Chapman-Kolmogorov que $P_{i,i}^{(n)} \geq P_{i,i}^n > 0$ para todo $n \geq 1$. Portanto i é aperiódico.

Exercício 14. Mostre que se $i \leftrightarrow j$, então $Per(i) = Per(j)$.

Solução: Segue da definição de comunicação de estados que $i \leftrightarrow j$ sse $P_{i,j}^{(n)} > 0$ e $P_{j,i}^{(m)} > 0$ para algum $n, m > 0$. Seja $d_i = Per(i)$ e $d_j = Per(j)$. Da equação de Chapman-Kolmogorov tem-se

$$P_{j,j}^{(m+k+n)} \geq P_{j,i}^{(m)} P_{i,i}^{(k)} P_{i,j}^{(n)}$$

Assim, quando $k = 0$, temos que $P_{i,i}^{(0)} = 1$ e portanto $P_{j,j}^{(m+n)} > 0$. Logo d_j divide $m + n$. Por outro lado, se $P_{i,i}^{(k)} > 0$ então d_j divide $m + k + n$, logo divide também k. Mostrámos que d_j é um divisor comum de $\{k \geq 1 \colon P_{i,i}^{(k)} > 0\}$. Como d_i é o máximo divisor comum desse conjunto, concluímos que $d_j \leq d_i$. De forma análoga se demonstra que $d_i \leq d_j$. Logo $d_i = d_j$.

Exercício 15. É possível construir uma cadeia de Markov homogénea com espaço de estados finito e um estado recorrente nulo? e todos os estados transientes? Justifique.

Solução: Não. Todos os estados recorrentes de uma cadeia de Markov com espaço de estados finito são positivos. Também não é possível construir uma cadeia de Markov com espaço finito tendo apenas estados transientes, uma vez que toda a cadeia com um número finito de estados tem pelo menos um estado recorrente.

Exercício 16. Determine a decomposição dos estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ da cadeia de Markov homogénea com a seguinte matriz de transição e calcule $m_i = E(T_i|X_0 = i)$ para todo $i \in S$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$S = \{0\} \cup \{1\} \cup \{3\} \cup \{2, 4\} \cup \{5\}$$

As classes $\{2, 4\}$ e $\{5\}$ são fechadas, logo compostas por estados recorrentes positivos. As restantes classes são abertas, logo formadas por estados transientes. Relativamente aos tempos médios de reentrada

$m_i = E(T_i|X_0 = i)$, vemos que $m_0 = m_1 = m_3 = +\infty$ uma vez que os estados 0, 1 e 3 são transientes. No caso dos estados 2, 4 e 5 podemos calcular sem dificuldade,

$$\mathbb{P}(T_2 = n|X_0 = 2) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases},$$

$$\mathbb{P}(T_4 = n|X_0 = 4) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}$$

e

$$\mathbb{P}(T_5 = n|X_0 = 5) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}.$$

Assim,

$$m_2 = 2, \quad m_4 = 2 \quad \text{e} \quad m_5 = 1.$$

Exercício 17. Determine e classifique todas as classes de comunicação e período de cada classe para a cadeia de Markov homogénea com estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Calcule $m_5 = E(T_5|X_0 = 5)$.

Solução:

$$S = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\}.$$

A classe $\{2, 3, 4, 5\}$ é fechada, portanto é formado por estados recorrentes positivos. As classes $\{0\}$ e $\{1\}$ são abertas, logo 0 e 1 são transientes. Para calcular m_5 determinamos a distribuição de T_5,

$$\mathbb{P}(T_5 = n|X_0 = 5) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = 1, 3, 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim, $m_5 = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = 3$.

Exercício 18. Determine as distribuições estacionárias das cadeias de Markov com matrizes de transição:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Solução: Um distribuição estacionária π é solução do sistema $\pi = \pi P$. Relativamente à primeira matriz de transição obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \pi_4 = \pi_2 \\ 0 = \pi_3 \\ \pi_2 = \pi_4 \\ \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_3 + \pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se $\pi_0 = \pi_1 = \pi_3 = 0$ e $\pi_2 = \pi_4$. Como $\pi_2 + \pi_4 = 1$ temos que $\pi_2 = \pi_4 = \frac{1}{2}$.

Relativamente à segunda matriz de transição temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_0 = \pi_0 \\ 0 = \pi_1 \\ \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_2 \\ \pi_2 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_3 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \pi_3 = \pi_4 \\ \pi_4 + \frac{1}{3}\pi_5 = \pi_5 \end{cases}$$

Resolvendo obtém-se

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = \left(0, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$$

Exercício 19. Determine a distribuição limite da cadeia de Markov com matriz transição

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < p, q < 1, \quad p + q = 1.$$

Solução: As equações do sistema $\pi = \pi P$ são

$$\begin{cases} q(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3) + \pi_4 = \pi_0 \\ p\pi_0 = \pi_1 \\ p\pi_1 = \pi_2 \\ p\pi_2 = \pi_3 \\ p\pi_3 = \pi_4 \end{cases}$$

Temos que

$$\pi_1 = p\pi_0, \quad \pi_2 = p\pi_1 = p^2\pi_0, \quad \pi_3 = p\pi_2 = p^3\pi_0, \quad \pi_4 = p\pi_3 = p^4\pi_0.$$

Como $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$ obtemos

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + p + \cdots + p^4} = \frac{1-p}{1-p^5}.$$

Logo,

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = \frac{1-p}{1-p^5}(1, p, p^2, p^3, p^4).$$

Exercício 20. Considere a cadeia de Markov com estados $S = \{0, 1, 2, 3\}$ e matriz transição,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Determine:

(1) A distribuição limite da cadeia de Markov.
(2) Calcule $E(T_0|X_0 = 1)$. (Dica: observe que a cadeia passa sempre do estado 0 para o estado 1)

Solução:

(1) Como $0 \to 1 \to 3 \to 2 \to 0$, todos os estados comunicam entre si. Logo a cadeia é irredutível. Por outro lado, $P_{1,1} > 0$, portanto o estado 1 é aperiódico. Logo a cadeia é aperiódica. Portanto, a cadeia tem uma única distribuição estacionária que é igual à distribuição limite. Vamos então calcular a distribuição estacionária. Resolvendo o sistema $\pi = \pi P$ obtemos

$$\pi = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

(2) Como a cadeia passa sempre do estado 0 para o estado 1,

$$E(T_0|X_0 = 0) = 1 + E(T_0|X_0 = 1).$$

Da alínea anterior deduzimos que $E(T_0|X_0 = 0) = 6$. Logo,

$$E(T_0|X_0 = 1) = 5.$$

Exercício 21. Considere uma cadeia de Markov com estados $S = \{0,1,2,3\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine os tempos médios de absorção no estado 3.

Solução: Os tempos médios de absorção no estado 3 satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 1 + \frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{5}t_1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{2}{5}t_3 \\ t_2 = 1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{41}{16}, \frac{9}{4}, 2, 0\right)$$

Exercício 22. Considere uma cadeia de Markov com estados $S = \{0,1,2,3\}$ e matriz de transição

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Partindo do estado 1, determine a probabilidade da cadeia ser absorvida pelo estado 0.
(2) Determine o tempo médio de absorção em $A = \{0,3\}$.

Solução:

(1) As probabilidades de absorção no estado 0 satisfazem

$$\begin{cases} h_0 = 1 \\ h_1 = \frac{1}{3}h_0 + \frac{1}{6}h_1 + \frac{1}{6}h_2 + \frac{1}{3}h_3 \\ h_2 = \frac{1}{4}h_0 + \frac{1}{8}h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{8}h_3 \\ h_3 = 0 \end{cases}$$

que tem solução,

$$(h_0, h_1, h_2, h_3) = \left(1, \frac{10}{19}, \frac{12}{19}, 0\right)$$

Logo, partindo do estado 1, a probabilidade da cadeia ser absorvida pelo estado 0 é $10/19$.

(2) Os tempos médios de absorção em $\{0,3\}$ satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{6}t_1 + \frac{1}{6}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_2 = 1 + \frac{1}{4}t_0 + \frac{1}{8}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{8}t_3 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = \left(0, \frac{32}{19}, \frac{46}{19}, 0\right)$$

Exercício 23. Considere o seguinte jogo. Uma moeda perfeita é lançada sucessivamente ao ar até que apareçam duas caras sucessivas.

(1) Modele o jogo usando uma cadeia de Markov. Determine a matriz de transição e o diagrama da cadeia. (Dica: $S = \{0,1,2\}$)
(2) Determine a decomposição do espaço dos estados da cadeia.
(3) Calcule o tempo médio de duração do jogo supondo que começa o jogo com duas coroas.

Solução:

(1) Denotemos por 0 coroa e 1 cara. Escrevemos o resultado de um número de lançamentos como uma palavra ω de 0's e 1's. Seja $\omega\mathbf{0}$ uma palavra com um zero no fim. Então $\omega 0\mathbf{1}$ com probabilidade $1/2$ ou $\omega 0\mathbf{0}$ com probabilidade $1/2$. Seja agora $\omega\mathbf{1}$ uma palavra com um 1 no fim. Então $\omega 1\mathbf{0}$ com probabilidade $1/2$ ou $\omega 1\mathbf{1}$ também com probabilidade $1/2$. Seja $S = \{0,1,2\}$. Modelando o jogo usando uma cadeia de Markov obtém-se a matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $S = \{0,1\} \cup \{2\}$ onde $\{0,1\}$ são estados transitivos e $\{2\}$ é recorrente (de facto absorvente).
(3) Quer-se calcular o tempo médio de absorção em $\{2\}$ partindo do estado 0. Os tempos médios satisfazem

$$\begin{cases} t_0 = 1 + \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_1 \\ t_1 = 1 + \frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}t_2 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo

$$(t_0, t_1, t_2) = (6, 4, 0)$$

Portanto, o tempo médio de duração do jogo supondo que começa o jogo com duas coroas é 6 lançamentos.

Exercício 24. Um autocarro chega a uma determinada paragem de 10 em 10 minutos. Suponha que o número de autocarros que chegam à paragem segue um processo de Poisson.

(1) Qual é a probabilidade de o intervalo entre chegadas sucessivas ser superior a 20 minutos?
(2) Após perder um autocarro, quanto tempo tem um passageiro de esperar para apanhar o autocarro seguinte com probabilidade de 0.5?
(3) Dado que na última hora não chegou nenhum autocarro qual é a probabilidade esperar mais uma hora?

Solução: Seja $N(t)$ o número de autocarros que passaram até ao instante t (horas). Suponhamos que $N(t)$ é um processo de Poisson com taxa 6. A probabilidade de o intervalo entre chegadas sucessivas ser superior a 20 minutos é

$$\mathbb{P}(T > 1/3) = e^{-6*(1/3)} = e^{-2}.$$

Para calcular o tempo que um passageiro tem de esperar para apanhar um autocarro com probabilidade de 0.5 resolvemos a equação

$$\mathbb{P}(T \leq t) = 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-6t} = 0.5$$

que tem solução $t = \frac{1}{6}\log 2$. Finalmente,

$$\mathbb{P}(N(2) = 0|N(1) = 0) = \mathbb{P}(N(1) = 0) = e^{-6}.$$

Exercício 25. Seja T uma variável aleatória com distribuição de probabilidade contínua. Mostre que T tem distribuição exponencial se e só se T não tem memória, isto é,

$$\mathbb{P}(T > x + y|T > x) = \mathbb{P}(T > y).$$

Solução: Seja $g(x) = \mathbb{P}(T > x)$. Então

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \mathbb{P}(T > x+y) \\ &= \mathbb{P}(T > x)\frac{\mathbb{P}(T > x+y, T > x)}{\mathbb{P}(T > x)} \\ &= \mathbb{P}(T > x)\mathbb{P}(T > x+y|T > x) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

Portanto, a função $g(x)$ é multiplicativa. Logo $\log(g(x))$ é aditiva. Segue do lemma de Cauchy que uma função aditiva contínua é da forma

$$\log(g(x)) = -\lambda x, \quad \lambda > 0.$$

Assim, $g(x) = e^{-\lambda x}$.

Exercício 26. A chegada de passageiros a uma paragem de autocarro segue um processo de Poisson com intensidade λ_1. Seja T o tempo de chegada de um autocarro que é independente do processo de Poisson. Quando $t = 0$ não existem passageiros na paragem. Supondo que T segue uma distribuição exponencial com intensidade λ_2, calcule o número médio de pessoas na paragem no instante T.

Solução: Quer-se calcular $E(N(T))$. Usando a lei de probabilidade total para a esperança condicional,

$$\begin{aligned}
E(N(T)) &= \int_0^\infty E(N(T)|T = t) f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty E(N(t)|T = t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty E(N(t))\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \int_0^\infty (\lambda_1 t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}
\end{aligned}$$

Exercício 27. Suponha que N_1 e N_2 são processos de Poisson independentes com intensidades λ_1 e λ_2, respectivamente. Mostre que $N_1 + N_2$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda_1 + \lambda_2$.

Solução: Seja $X(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Vamos verificar que $X(t)$ satisfaz os axiomas do processo de Poisson:

(1) $X(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0$
(2) $X(t + s) - X(s) = N_1(t + s) - N_1(s) + N_2(t + s) - N_2(s)$. Como a soma de variáveis aleatórias de Poisson independentes é também Poisson, temos que o incremento $X(t + s) - X(s)$ segue distribuição de Poisson com taxa $\lambda_1 t + \lambda_2 t$.
(3) $X(t)$ tem incrementos independentes porque N_1 e N_2 sao independentes processos de Poisson.

Exercício 28. Mostre que

$$E(Z(t)) = \lambda\mu t \quad \text{e} \quad V(Z(t)) = \lambda(\nu^2 + \mu^2)t$$

onde $\mu = E(X_1)$ e $\nu^2 = V(X_1)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
E(Z(t)) &= E(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=0}^{N(t)} X_k | N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=0}^{n} X_k | N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{k=0}^{n} X_k)\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \mu\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \mu E(N(t)) \\
&= \mu\lambda t
\end{aligned}$$

A variância $V(Z(t))$ calcula-se de forma análoga.

Exercício 29. Considere um sistema sujeito a impactos. Em média observa-se λ impactos por unidade de tempo. Seja $N(t)$ o número de impactos observados até instante t. Cada impacto provoca um estrago mensurável X_n no sistema. Supomos que as variáveis X_n são exponencialmente distribuídas com intensidade $\mu > 0$. O sistema permanece em funcionamento enquanto o estrago total não exceder um valor crítico $a > 0$. Usando o processo de Poisson composto para descrever o estrago total do sistema determine:

(1) A distribuição de probabilidade do tempo de falha do sistema, i.e.,

$$T = \min\{t \geq 1 \colon Z(t) \geq a\}$$

(2) O tempo médio de funcionamento $E(T)$.

Solução: Seja $Z(t)$ o estrago total do sistema. Supomos que $Z(t)$ é um processo de Poisson composto.

(1) Querer-se calcular a função de distribuição de T, isto é, $\mathbb{P}(T \leq t)$. Uma vez que temos a igualdade de eventos

$$\{T > t\} = \{Z(t) < a\}$$

vem que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(Z(t) < a) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n < a)\mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n < a)\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

onde $X_1 + \ldots + X_n$ tem distribuição gama,

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n < a) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu a)^k}{k!}e^{-\mu a}$$

(2)

$$E(T) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t)\, dt = \frac{1 + \mu a}{\lambda}$$

Exercício 30. Considere o crescimento linear com imigração. Mostre que o valor médio (no limite) da população é $a/(\mu - \lambda)$ quando $\lambda < \mu$.

Solução: Se π_n é a distribuição estacionária do processo, então o valor médio (no limite) da população é

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n &= (1 - \lambda/\mu)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} nC_n^{\alpha+n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \\
&= (1 - \lambda/\mu)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha + n - 1)\cdots(\alpha + 1)\alpha}{(n-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \\
&= (1 - \lambda/\mu)^{\alpha} \frac{\alpha\lambda}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\alpha+n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \\
&= (1 - \lambda/\mu)^{\alpha} \frac{\alpha\lambda}{\mu} \frac{1}{(1 - \lambda/\mu)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\alpha\lambda}{\mu} \frac{1}{1 - \lambda/\mu} \\
&= a/(\mu - \lambda)
\end{aligned}$$

uma vez que $\alpha = a/\lambda$.

Exercício 31. Seja $(Y_n)_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com estados $\{0,1\}$ e matriz de transição

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Considere um processo de Poisson $N(t)$ com parâmetro $\lambda > 0$. Mostre que

$$X(t) = Y_{N(t)}$$

é um processo de nascimento e morte com dois estados $\{0,1\}$. Determine os parâmetros do processo λ_0 e μ_1 em função de α e λ.

Solução: A propriedade de Markov segue do facto de Y_n ser uma cadeia de Markov. Vamos calcular as intensidades que caracterizam o processo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X(t+s)=1|X(s)=0) &= \mathbb{P}(X(t)=1|X(0)=0) \\
&= \mathbb{P}(Y_{N(t)}=1|Y_{N(0)}=0) \\
&= P_{0,1}^{(N(t))} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)}\mathbb{P}(N(t)=i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,1}^{(i)}(1-\lambda t+o(t))\frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= P_{0,1}(1-\lambda t+o(t))\lambda t+o(t) \\
&= P_{0,1}\lambda t+o(t) \\
&= \lambda t+o(t)
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_0 = q_{0,1} = \lambda$. De forma equivalente calcula-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X(t+s)=0|X(s)=1) &= P_{1,0}(1-\lambda t+o(t))\lambda t+o(t) \\
&= P_{1,0}\lambda t+o(t) \\
&= (1-\alpha)\lambda t+o(t)
\end{aligned}$$

Logo, $\mu_1 = q_{1,0} = (1-\alpha)\lambda$. Portanto,

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ (1-\alpha)\lambda & -(1-\alpha)\lambda \end{pmatrix}$$

Exercício 32. Considere um processo $X(t)$ de nascimento (sem morte) com parâmetros $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Supondo que $X(0) = 0$, determine $\mathbb{P}(X(t)=j)$ para $j = 0,1,2$.

Solução: Seja $\pi_j(t) = \mathbb{P}(X(t) = j)$ e considere-se o vector $\pi(t) = (\pi_j(t))$. Entao

$$\pi(t) = \pi(0)P(t)$$

onde $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j}$ é a matriz de probabilidades de transição e $\pi(0) = (1, 0, \ldots)$ uma vez que $X(0) = 0$. Assim,

$$\pi_j(t) = p_{0,j}(t), \quad j \geq 0.$$

Portanto, vamos calcular as probabilidades de transição $P_{0,j}(t)$ para $j = 0, 1, 2$. Usando as equações progressivas de Kolmogorov temos que

$$\begin{aligned}
p'_{0,0}(t) &= -\lambda_0 p_{0,0}(t) \\
p'_{0,1}(t) &= \lambda_0 p_{0,0}(t) - \lambda_1 p_{0,1}(t) \\
p'_{0,2}(t) &= \lambda_1 p_{0,1}(t) - \lambda_2 p_{0,2}(t)
\end{aligned}$$

Da primeira equação obtemos

$$p_0(t) = e^{-t}$$

Substituindo na segunda e resolvendo,

$$p_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)$$

e substituindo na última equação e resolvendo

$$p_2(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}\left(e^t - 1\right)^2.$$

Outra forma de resolver o exercício é observando que as intensidades são todas distintas e portanto a solução pode-se obter através da fórmula

$$p_n(t) = \lambda_0 \cdots \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right) e^{-\lambda_k t}, \quad n = 0, 1, 2$$

Exercício 33. Considere um processo de nascimento e morte com parâmetros $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = \mu n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Verifique que as probabilidades

$$p_{0,j}(t) = \frac{(\lambda p)^j e^{-\lambda p}}{j!}, \quad \text{onde} \quad p = \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu}$$

satisfazem as equações progressivas de Kolmogorov ($i = 0$).

Solução: Escrever as equações progressivas para $i = 0$,

$$p'_{0,j}(t) = \mu_{j+1} p_{0,j+1}(t) - \lambda_j p_{0,1}(t) + \lambda_{j-1} p_{0,j-1}(t)$$

e verificar que as expressões para $p_{0,j}(t)$ satisfazem a equação.

Exercício 34. Um camião viaja entre Lisboa, Castelo Branco e Porto com a seguinte matriz de intensidades (número de viagens por mês)

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Determine:

(1) A fracção de tempo (a longo prazo) que o camião permanece em cada cidade.
(2) O número médio de viagens por ano de Castelo Branco para Lisboa.

Solução:

(1) Resolvendo o sistema $\pi Q = 0$ vem que
$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$
Logo, o camião permanece metade do seu tempo em Lisboa e $1/4$ do tempo em Castelo Branco e Porto.
(2) Em média, o camião permanece $1/4$ (3 meses) do tempo em Castelo Branco e viaja para Lisboa 3 vezes por mês. Assim, o número médio de viagens por ano de Castelo Branco para Lisboa é 9.

Exercício 35. Seja $X(t)$ um processo de nascimento e morte com estados $\{0, 1, \ldots, N\}$ e parâmetros $\lambda_n = \alpha(N - n)$ e $\mu_n = \beta n$ onde $\alpha, \beta > 0$. Determine a distribuição estacionária.

Solução: Resolver o sistema $\pi Q = 0$ que tem solução
$$\pi_k = C_k^N p^k (1-p)^{N-k}, \quad p = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Exercício 36. Uma fábrica tem 2 máquinas e um técnico responsável pela sua manutenção. Suponha que cada máquina trabalha durante um tempo médio de 12 dias até necessitar de manutenção e o técnico demora em média 2 dias para realizar a respectiva manutenção.

(1) Supondo que a intensidade de avaria é proporcional ao número de máquinas em funcionamento, use um processo de nascimento e morte para modelar o número de máquinas em activo. Determine a matriz de intensidades que caracteriza o processo.
(2) Sabendo que $p_{0,0}(t) = \frac{6}{25} e^{-\frac{5t}{6}} + \frac{18}{25} e^{-\frac{5t}{12}} + \frac{1}{25}$ calcule as probabilidades de transição $p_{1,0}(t)$ e $p_{2,0}(t)$ do processo.
(3) Determine a distribuição estacionária.
(4) Qual é fracção de tempo (longo prazo) de funcionamento simultâneo das máquinas.

Solução:

(1)
$$Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/12 & -1/2 - 1/12 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$

(2) Escrevemos as equações regressivas de Kolmogorov para $p_{0,0}$ e $p_{1,0}$,

$$p'_{0,0}(t) = -\frac{1}{2}p_{0,0}(t) + \frac{1}{2}p_{1,0}(t)$$
$$p'_{1,0}(t) = \frac{1}{12}p_{0,0}(t) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right)p_{1,0}(t) + \frac{1}{2}p_{2,0}(t)$$

Assim,

$$p_{1,0}(t) = 2p'_{0,0}(t) + p_{0,0}(t)$$

e

$$\begin{aligned} p_{2,0}(t) &= 2p'_{1,0}(t) - \frac{1}{6}p_{0,0}(t) + \left(1 + \frac{1}{6}\right)p_{1,0}(t) \\ &= 4p''_{0,0}(t) + p'_{0,0}(t) - \frac{1}{6}p_{0,0}(t) + \left(1 + \frac{1}{6}\right)(2p'_{0,0}(t) + p_{0,0}(t)) \\ &= p_{0,0}(t) + \frac{10}{3}p'_{0,0}(t) + 4p''_{0,0}(t) \end{aligned}$$

(3)
$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (1/25, 6/25, 18/25)$$

(4) 18/25

Exercício 37. Clientes chegam a uma mercearia com uma intensidade de 5 por hora. O empregado demora em média 10 minutos a atender cada cliente. Determine a probabilidade de encontrar, a longo prazo, 2 ou mais clientes na mercearia.

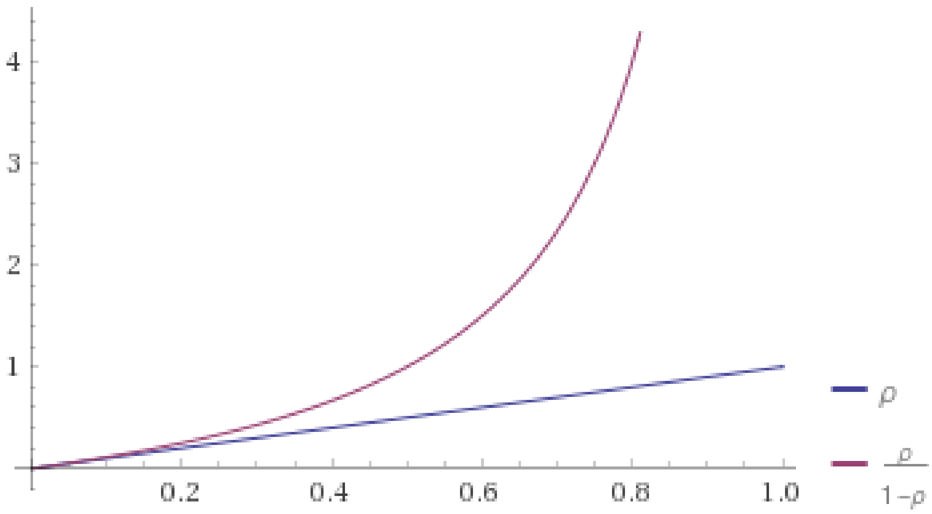
Solução: Temos $\lambda = 5$ e $\mu = 6$. Logo $\rho = 5/6$. Portanto, a probabilidade de encontrar, a longo prazo, 2 ou mais clientes na mercearia é

$$\sum_{n=2}^{\infty} \pi_n = \rho^2 = 25/36.$$

Exercício 38. Para uma fila de espera $M/M/1$ faça o gráfico a taxa de utilização do servidor $1 - \pi_0$ e do número médio L de pessoas no sistema como funções da intensidade de tráfego $\rho < 1$.

Solução:

Exercício 39. Um supermercado dispõe de duas caixas de *checkout*. Uma caixa tem um operador e a outra é automática. A caixa com operador tem um tempo médio de serviço de 30 segundos, enquanto que a caixa automática tem um tempo médio de serviço de 50 segundos. Supondo que os clientes chegam às caixas com uma intensidade de 1 cliente por minuto, compare os comprimentos das filas de espera das duas caixas.



Solução: Seja $\hat{\mu}$ e $\tilde{\mu}$ as intensidades com operador e automática (número de clientes por min). Então $\hat{\mu} = 2$ e $\tilde{\mu} = 6/5$. Logo,

$$\hat{L}_0 = \frac{(1/2)^2}{1 - 1/2} = 1/2 \quad \text{e} \quad \tilde{L}_0 = \frac{(5/6)^2}{1 - 5/6} = 25/6$$

Exercício 40. Considere uma fila de espera $M/M/2$. Determine o tempo médio de espera W quando $\lambda = 2$ e $\mu = 1.2$. Compare com o tempo médio de espera numa fila $M/M/1$ com $\lambda = 1$ e $\mu = 1.2$. Explique a diferença dos tempos de espera.

Solução: Com $s = 2$ temos que

$$W = \frac{L_0}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

onde $\rho = \lambda/(2\mu)$,

$$L_0 = 2\frac{\rho^3}{(1-\rho)^2}\pi_0$$

e

$$\pi_0 = \left(2\frac{\rho^2}{1-\rho} + 1 + 2\rho\right)^{-1}$$

Simplificando,

$$W = \frac{2}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho^2}$$

Por outro lado, quando $s = 1$, temos

$$W = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Assim, numa fila $M/M/2$ com $\lambda = 2$ e $\mu = 1.2$ temos $\rho = 5/6$ e

$$W_2 = 30/11$$

enquanto que numa fila $M/M/1$ com $\lambda = 1$ e $\mu = 1.2$ temos $\rho = 5/6$ e

$$W_1 = 5$$

Exercício 41. Suponha que clientes chegam a uma repartição das finanças seguindo um processo de Poisson com intensidade de 5 clientes por hora. A repartição tem um único funcionário que demora, em média, 10 minutos a atender cada cliente. Quando o número de clientes na repartição excede um certo número N o funcionário encerra a repartição. Determine o menor N tal que, a longo prazo, a probabilidade de o funcionário encerrar a repartição não exceda 0.01.

Solução: Queremos determinar o menor N tal que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) > N) \leq \frac{1}{100}$$

Usando a distribuição limite queremos resolver

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \pi_n \leq \frac{1}{100}$$

Mas

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \pi_n = \rho^{N+1} = (5/6)^{N+1}$$

Logo,

$$N = \left\lceil \frac{\log(100)}{\log(6/5)} - 1 \right\rceil = 25$$

onde $\lceil x \rceil$ representa o menor inteiro maior que x.

Exercício 42. Mostre que a sucessão definida no Exemplo 7.3 é uma martingala.

Solução:

- As variáveis X_n são integráveis porque ξ_k são também integráveis.
-

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) &= E(\xi_{n+1}X_n|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= x_n E(\xi_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= x_n E(\xi_{n+1}) \\
&= x_n
\end{aligned}$$

Exercício 43. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias iid e $E(|X_n|) < \infty$ para todo $n \geq 1$. Mostre que

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu$$

é uma martingala, onde $\mu = E(X_1)$.

Solução:

- As variáveis Z_n são integráveis porque X_k são também integráveis.
-

$$
\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E(Z_n + X_{n+1} - \mu | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n + E(X_{n+1} - \mu | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n + E(X_{n+1} - \mu) \\
&= z_n
\end{aligned}
$$

Exercício 44. Considere o passeio aleatório $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ onde a sucessão $(\xi_n)_{n\geq 1}$ é iid e $\mathbb{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Mostre que

$$
Z_n = X_n^2 - n
$$

é uma martingala.

Solução:

- Z_n é integrável porque toma um número finito de valores.
-

$$
\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E((X_n + \xi_{n+1})^2 - n - 1 | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= E(X_n^2 + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - n - 1 | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= E(Z_n + 2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - 1 | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n + E(2X_n\xi_{n+1} + \xi_{n+1}^2 - 1 | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n + E(\xi_{n+1}^2 - 1) + E(2X_n\xi_{n+1} | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= z_n
\end{aligned}
$$

porque $E(\xi_{n+1}^2) = 1$ e ξ_{n+1} é independente de $Z_1, \ldots, Z_n$ e tem valor esperado nulo.

Exercício 45. Seja $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ o passeio aleatório com $(\xi_n)_{n\geq 1}$ iid, $\xi_n = \pm 1$ com igual probabilidade. Mostre que

$$
Z_n = (-1)^n \cos(\pi X_n)
$$

é uma martingala.

Solução:

- Z_n é integrável porque toma um número finito de valores.
-

$$
\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E((-1)^{n+1} \cos(\pi X_{n+1}) | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\
&= E((-1)^{n+1} \cos(\pi(X_n + \xi_{n+1})) | Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n)
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\cos(\pi(X_n + \xi_{n+1})) = \cos(\pi X_n)\cos(\pi\xi_{n+1}) - \sin(\pi X_n)\sin(\pi\xi_{n+1})
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= z_n E(-\cos(\pi\xi_{n+1})) + \sin(\pi x_n) E(\sin(\pi\xi_{n+1})) \\
&= z_n \times 1 + \sin(\pi x_n) \times 0
\end{aligned}
$$

Exercício 46. Seja $X_0 = 0$ e

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n - 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

onde $(\xi_n)_{n\geq 1}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias iid que têm uma distribuição de Poisson com valor esperado $\mu > 0$. Determine os valores de μ para os quais a sucessão $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma martingala, submartingala ou supermartingala.

Solução: É óbvio que X_n é integrável. De seguida calculamos,

$$E(X_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = x_n + \mu - 1$$

Portanto, X_n é uma martingala se $\mu = 1$, submartingala se $\mu \geq 1$, supermartingala se $\mu \leq 1$.

Exercício 47. Mostre que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ no jogo da ruína.

Solução: O jogo da ruína pode ser descrito como uma cadeia de Markov nos estados $\{-a, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, b\}$ onde $P_{i,i+1} = P_{i,i-1} = 1/2$ se $i \notin \{-a, b\}$ e $P_{-a,-a} = P_{b,b} = 1$. Portanto, é um passeio aleatório onde os estados $-a$ e b são absorventes. Partindo de $X_0 = 0$, quer-se calcular $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ onde

$$\tau = \min\{n \geq 1 \colon X_n \in \{-a, b\}\}$$

O tempo τ é o tempo de primeira entrada no conjunto fechado $A = \{-a, b\}$. Portanto, $h_0 = \mathbb{P}(\tau < \infty)$ é a probabilidade de absorção da cadeia no conjunto A dado que parte do estado 0. As probabilidades de absorção h_i satisfazem o sistema

$$
\begin{cases}
h_{-a} = 1 \\
h_{-a+1} = \frac{1}{2}h_{-a} + \frac{1}{2}h_{-a+2} \\
\vdots \\
h_i = \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{1}{2}h_{i+1} \\
\vdots \\
h_{b-1} = \frac{1}{2}h_{b-2} + \frac{1}{2}h_b \\
h_b = 1
\end{cases}
$$

Este sistema tem única solução $h_i = 1$ para todo i. Portanto, $h_0 = 1$ como queríamos demonstrar.

Exercício 48. Sejam $(\xi_n)_{n\geq 1}$ variáveis aleatórias iid tais que $\xi_n = \pm 1$ com probabilidade $P(\xi_n = 1) = p$ e $P(\xi_n = -1) = q$ onde $p \neq q$. Considere o passeio aleatório,

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n \,,$$

e o tempo de paragem

$$\tau = \min \{n \geq 1 : X_n \in \{-a, b\}\} \,,$$

onde $a, b > 0$. Mostre que:

(1) A sucessão $Z_n = (q/p)^{X_n}$ é uma martingala.
(2)
$$\mathbb{P}(X_\tau = b) = \frac{1 - (q/p)^{-a}}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}}$$

Solução:

(1) Z_n é obviamente integrável. Além disso,

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) &= E((q/p)^{X_{n+1}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\ &= E((q/p)^{X_n}(q/p)^{\xi_{n+1}}|Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) \\ &= z_n E((q/p)^{\xi_{n+1}}) \\ &= z_n \end{aligned}$$

porque

$$E((q/p)^{\xi_{n+1}}) = (q/p)^1 \times p + (q/p)^{-1} \times q = q + p = 1$$

(2) Segue do teorema da paragem opcional que

$$E(Z_\tau) = E(Z_1) = 1.$$

Além disso, se $p_b = \mathbb{P}(X_\tau = b)$ então

$$E(Z_\tau) = (q/p)^{-a}(1 - p_b) + (q/p)^b p_b$$

Resolvendo em ordem a p_b,

$$p_b = \frac{1 - (q/p)^{-a}}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}}$$

Exercício 49. Seja $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ o passeio aleatório onde $(\xi_n)_{n\geq 1}$ são iid tais que $\xi_n = \pm 1$ com igual probabilidade. Supondo que $k \in \mathbb{N}$:

(1) Mostre que $Z_n = (-1)^n \cos(\pi(X_n + k))$ é uma martingala.
(2) Calcule $E((-1)^\tau)$ onde τ é o tempo de paragem

$$\tau = \min \{n \geq 1 : |X_n| = k\} \,.$$

Solução:

(1) Idêntica ao Exercício 45.

(2) Aplicando o teorema da paragem opcional,

$$E(Z_\tau) = E(Z_1) = (-1)^k$$

Por outro lado,

$$E(Z_\tau) = E((-1)^\tau)$$

Logo,

$$E((-1)^\tau) = (-1)^k$$

Exercício 50. Sejam $X_1, X_2, \dots$ variáveis aleatórias iid tais que $X_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Considere o tempo de paragem

$$\tau = \min\{n \geq 1 \colon X_1 + \cdots + X_n = 1\}.$$

Determine $E(\tau)$.

Solução: Seja $p = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Se $p \leq 1/2$ então $E(\tau) = \infty$. Caso contrário, se $p > 1/2$, usando a equação de Wald, $E(\tau) = 1/(2p - 1)$.

Exercício 51 (difícil)**.** Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias e τ um tempo de paragem relativo a X_n tal que para algum $k \in \mathbb{N}$ e algum $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\tau \leq n + k \,|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) > \epsilon, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Mostre que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

Exercício 52. Mostre que

$$Cov(W(t), W(s)) = \sigma^2 \min\{t, s\},$$

onde $W(t)$ é o processo de Wiener com parâmetros (x, μ, σ).

Solução: Se $t > s$,

$$\begin{aligned} E(B(t)B(s)) &= E((B(t) - B(s))B(s) + B(s)^2) \\ &= E(B(t) - B(s))E(B(s)) + E(B(s)^2) \\ &= E(B(s)^2) \\ &= s \end{aligned}$$

Logo, $E(B(t)B(s)) = \min\{t, s\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Cov(W(t), W(s)) &= Cov(x + \mu t + \sigma B(t), x + \mu s + \sigma B(s)) \\ &= \sigma^2 Cov(B(t), B(s)) \\ &= \sigma^2 \min\{t, s\} \end{aligned}$$

Exercício 53. Seja $B(t)$ um movimento Browniano. Mostre que

$$E(e^{B(t)}) = e^{t/2}$$

para todo $t \geq 0$.

Solução:

$$\begin{aligned} E(e^B(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx \\ &= e^{\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2t}}\, dx \\ &= e^{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Exercício 54. Seja $\{X(t)\colon t \geq 0\}$ um processo estocástico a tempo contínuo que tem as seguintes propriedades:

(1) $X(0) = 0$
(2) trajectórias contínuas $\mathbb{P}$-q.c.
(3) para quaisquer $0 < t_1 < \cdots < t_n$ o vector aleatório $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ tem função de densidade de probabilidade conjunta,

$$f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})$$

onde

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,,$$

é a função de densidade da distribuição normal.

Mostre que $X(t)$ é um movimento Browniano.

Solução:

- Queremos mostrar que para quaisquer $0 \leq s < t$ o incremento $X(t) - X(s)$ tem distribuição normal com valor esperado 0 e variância $t - s$. Segue da terceira hipótese que a função de densidade conjunta de $(X(s), X(t))$ é

$$f_s(x) f_{t-s}(y - x)\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(X(t) - X(s) \leq z) &= \int_{\{y - x \leq z\}} f_s(x) f_{t-s}(y-x)\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z+x} f_s(x) f_{t-s}(y-x)\, dydx \\ &= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) f_{t-s}(y)\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{z} f_{t-s}(y)\, dy \end{aligned}$$

- Para quaisquer $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ queremos mostrar que os incrementos,

$$X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

são independentes. Se $Y_1, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias que seguem uma distribuição normal então são independentes sse não são correlacionadas, ou seja, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto, como o valor esperado dos incrementos é nulo, é suficiente mostrar que,

$$E\left[(X(u) - X(t))(X(s) - X(r))\right] = 0\,, \quad t \leq u \leq r \leq s\,.$$

Mas para $s \leq t$ temos que,

$$\begin{aligned} E(X(s)X(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_s(x)f_{t-s}(y-x)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_s(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{t-s}(y-x)\,dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_s(x)\,dx = s\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E\left[(X(u) - X(t))(X(s) - X(r))\right] &= E(X(u)X(s)) - E(X(u)X(r)) \\ &\quad - E(X(t)X(s)) + E(X(t)X(r)) = u - u - t + t = 0 \end{aligned}$$

Exercício 55. Seja $B(t)$ um movimento Browniano. Mostre que dados $0 \leq s < t$ e A Boreliano de $\mathbb{R}$ então,

$$\mathbb{P}(B(t) \in A | B(s) = x) = \int_A f_{t-s}(y - x)dy\,,$$

onde $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$.

Solução: Segue de

$$f_{B(t),B(s)}(x, y) = f_{B(s)}(y) f_{B(t)-B(s)}(x - y).$$

e

$$f_{B(t)|B(s)}(x|y) = \frac{f_{B(t),B(s)}(x, y)}{f_{B(s)}(y)}$$

Exercício 56. Seja $B(t)$ um movimento Browniano e considere instantes $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Determine a distribuição de probabilidade das variáveis:

(1) $B(t_1) + B(t_2)$
(2) $B(t_1) + B(t_2) + B(t_3)$

Solução:

(1) Como $B(t_1) + B(t_2) = 2B(t_1) + B(t_2) - B(t_1)$, segue dos incrementos serem independentes que $B(t_1) + B(t_2)$ tem distribuição normal com média 0 e variância $4t_1 + t_2 - t_1 = 3t_1 + t_2$.
(2)

$$B(t_1) + B(t_2) + B(t_3) = 3B(t_1) + 2(B(t_2) - B(t_1)) + B(t_3) - B(t_2)$$

Logo, $B(t_1) + B(t_2) + B(t_3)$ tem distribuição normal de média 0 e variância

$$9t_1 + 4(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) = 5t_1 + 3t_2 + t_3$$